Percolation

Vincent BEFFARA
Patricia REYNAUD

Mercredi 28 mai 1997

Introduction

Considérons une pierre poreuse plongée dans l'eau. Comment peut-on prévoir si un point à l'intérieur de la pierre est mouillé ou non?

C'est pour modéliser mathématiquement ce genre de situation que la percolation a été développée. Plus généralement la percolation permet de modéliser certains problèmes physiques dans lesquels le comportement macroscopique est déterminé par un comportement microscopique aléatoire.

Par exemple, le fait qu'un alliage constitué de conducteur et d'isolant conduise lui-même l'électricité dépend essentiellement de la proportion des deux matériaux, des connexions réalisées au niveau microscopique entre les deux composants.

Nous allons présenter d'abord un bref aperçu de la théorie de la percolation puis la démonstration d'un des principaux résultats. Enfin nous évoquerons certains problèmes ouverts.

1 Formalisme et premiers résultats

1.1 Le modèle

Soit $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs et soit d un entier positif non nul (que nous supposerons supérieur à 2 le plus souvent). Si x est un élément de $\mathbb{Z}^d$, disons $x = (x_1, \ldots, x_d)$, on notera $|x| = \sum_{i=1}^{d} |x_i|$; ceci permet de définir sur $\mathbb{Z}^d$ une distance, notée $\delta(x, y) = |x - y|$. Si $\delta(x, y) = 1$, on dira que x et y sont *adjacents*, et on écrira $x \sim y$. On notera de plus $\|x\| = \max\{|x_i|, 1 \leq i \leq d\}$.

Soit $\mathbb{E}^d$ l'ensemble des paires $\{x, y\}$ d'éléments de $\mathbb{Z}^d$ vérifiant $x \sim y$, on peut alors définir le graphe $\mathbb{L}^d = (\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$. Les éléments de $\mathbb{E}^d$ seront appelés *arêtes*. Il sera commode de plonger $\mathbb{L}^d$ dans $\mathbb{R}^d$: on représentera alors les éléments de $\mathbb{E}^d$ par des segments. Si x et y sont adjacents, on notera $< x, y >$ l'arête joignant x et y.

Soit à présent p un réel compris (au sens large) entre 0 et 1, que nous appellerons *probabilité caractéristique*. On veut modéliser le fait que chaque arête de $\mathbb{L}^d$ est ouverte avec une probabilité p et fermée avec une probabilité $1 - p$. Pour cela, notons $\Omega = \prod_{e \in \mathbb{E}^d} \{0, 1\}$. Les éventualités, *i.e.* les éléments de Ω, seront appelées *configurations* et notées par la lettre ω. On munit Ω de la tribu-produit $\mathcal{F}$ (engendrée par les événements cylindriques). Soit alors, pour chaque $e \in \mathbb{E}^d$, μ_e la probabilité de Bernoulli sur $\{0, 1\}$, définie par $\mu_e(1) = p$ et $\mu_e(0) = 1 - p$; on note

$$P_p = \bigotimes_{e \in \mathbb{E}^d} \mu_e.$$

Si A est un événement, on notera A^c l'événement contraire et I_A la fonction indicatrice de A.

On appelle *chemin* toute suite alternée $x_0, e_0, x_1, \ldots, e_n, x_n$ de points de $\mathbb{Z}^d$ et d'arêtes, avec, pour tout i, $e_i =< x_i, x_{i+1} >$, et telle que les x_i soient deux à deux distincts. Un chemin est dit *ouvert* si toutes ses arêtes sont ouvertes, *i.e.* si on a $\forall i, \omega(e_i) = 1$, et *fermé* si toutes ses arêtes sont fermées.

Considérons alors le sous-graphe (aléatoire) de $\mathbb{L}^d$ formé des points de $\mathbb{Z}^d$ et des arêtes de $\mathbb{E}^d$ qui sont ouvertes : on notera $C(x)$ la composante connexe de ce sous-graphe contenant x. Toutes les arêtes étant indépendantes, la répartition de $C(x)$ ne dépend pas du point x, c'est pourquoi on étudiera le plus souvent $C(0)$, que l'on notera plus simplement C. On note $|C(x)|$ le cardinal de $C(x)$.

Enfin, on notera $B(n) = [-n, n]^d = \{x \in \mathbb{Z}^d, \|x\| \leq n\}$, et $B(n, x) = x + B(n)$. Par abus de notation $B(n)$ désignera aussi le sous-graphe de $\mathbb{L}^d$ formé des points de $B(n)$ et des arêtes les reliant.

1.2 Existence de p_c

Notons $\theta(p)$ la probabilité de percolation, c'est-à-dire la probabilité pour qu'un sommet x appartienne à une composante connexe infinie. Comme le réseau et la mesure sont invariants par translation, cette probabilité est indépendante du point x et ne dépend donc effectivement que de p. Cela peut donc aussi être vu comme $P_p(|C| = \infty)$.

Il est clair que $\theta(0) = 0$, que $\theta(1) = 1$. De plus, on peut réaliser la probabilité P_p de la manière suivante : définissons une famille $X = (X_e)_{e \in \mathbb{E}^d}$ de variables aléatoires uniformément distribuées sur $[0; 1]$, les X_e étant deux à deux indépendantes. Définissons alors, pour tout p, une configuration $\omega_{p,X}$ où une arête e est ouverte quand $X_e \leq p$ et fermée dans le cas contraire. Si $p > p'$, toute arête ouverte dans $\omega_{p',X}$ est ouverte dans $\omega_{p,X}$ et ainsi, puisque, pour tout q, $\theta(q) = P(\text{la composante connexe de } \omega_{q,X} \text{ contenant 0 est infinie})$, on a $\theta(p) \geq \theta(p')$. La fonction θ est donc croissante, donc il existe une probabilité critique p_c, dépendant du réseau, telle que pour $p < p_c$, $\theta(p)$ soit nulle et pour $p > p_c$, $\theta(p)$ soit strictement positive. Ainsi,

$$p_c(d) = \sup\{p, \theta(p) = 0\}$$

Quand la dimension vaut 1, il est clair que $p_c = 1$. Nous supposerons désormais que $d \geq 2$.

Remarque: Plongeons le réseau $\mathbb{L}^d$ dans le réseau de dimension $d+1, \mathbb{L}^{d+1}$: si l'origine est dans une composante connexe infinie en dimension d, elle l'est donc dans la dimension $d+1$. Ainsi $\theta(p, d)$ est une fonction décroissante en d et donc nous avons

$$p_c(d+1) \leq p_c(d).$$

Nous allons prouver le théorème suivant :

Théorème 1 *Si $d \geq 2$, on a $0 < p_c(d) < 1$.*

D'après le résultat de la remarque, il suffit de prouver que $\forall d \geq 2, p_c(d) > 0$ puis que $p_c(2) < 1$.

Pour la première partie, il suffit de prouver que $\theta(p) = 0$ pour p assez proche de 0.

Soient $\sigma(n)$ le nombre de chemins de longueur n dans le réseau $\mathbb{L}^d$qui commencent à l'origine et $N(n)$ le nombre de tels chemins qui sont ouverts. Un tel chemin est ouvert avec probabilité p^n et l'on a donc $E_p(N(n)) = p^n \sigma(n)$.

NB : $\sigma(n)$ est en fait le nombre de marches autoévitantes de longueur n partant d'un point donné.

Quand l'origine appartient à une composante connexe infinie, il y a de tels chemins ouverts pour tous les n. On obtient ainsi pour tout n :

$$\theta(p) \leq P_p(N(n) \geq 1) \leq E_p(N(n)) = p^n \sigma(n) \tag{1}$$

Posons $\lambda(d) = \limsup\limits_{n\to\infty}\{\sigma(n)^{1/n}\}$

Lors de la construction d'un chemin de longueur n en dimension d, il y a, à chaque étape, au plus $2d-1$ choix possibles, sauf à l'origine, d'où $\sigma(n) \leq 2d(2d-1)^n$. Il s'ensuit que $\lambda(d) \leq 2d-1$.

D'après l'équation (1),

$$\theta(p) \leq \{p\lambda(d) + o(1)\}^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ si } p\lambda(d) < 1 \tag{2}$$

Or ceci est impliqué par le fait que $p(2d-1) < 1$ et donc on a $p_c(d) > \frac{1}{2d-1}$.

On a ainsi montré que $p_c(d) > 0$.

Pour prouver que $p_c(2) < 1$, il suffit de montrer que $\theta(p) > 0$ pour p assez proche de 1.

Pour cela, nous avons besoin de définir le réseau dual du réseau $\mathbb{L}^d$: un sommet du réseau dual est pris dans chaque face du réseau initial et les arêtes du réseau dual sont prises orthogonales aux arêtes initiales . Le réseau ainsi obtenu, noté $(\mathbb{L}^d)^*$, est le réseau initial translaté de $(1/2, 1/2)$. Ouvrons chaque arête de $(\mathbb{L}^d)^*$lorsque l'arête orthogonale du réseau initial est ouverte, nous obtenons ainsi un réseau avec la même probabilité caractéristique p. Alors C est finie si et seulement si un lacet d'arêtes fermées du réseau dual entoure l'origine[1], comme dans la figure ci-dessous :

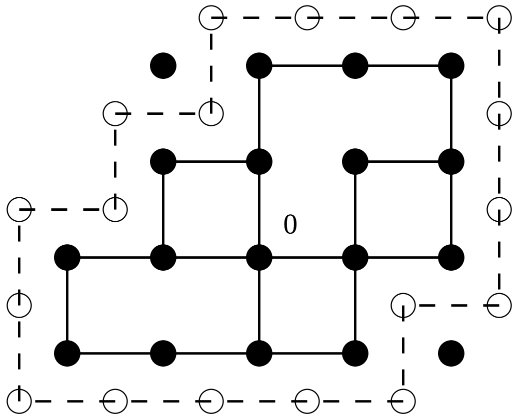

FIG. 1 – *Chemin du dual entourant l'origine quand $|C|$ est fini*

Nous allons compter le nombre de lacets de longueur n entourant l'origine $\rho(n)$ dans le réseau dual. Un tel lacet part d'un point de coordonnées $(k+1/2, 1/2)$ pour $0 \leq k < n$ et il est constitué d'une marche autoévitante de longueur $n-1$. Il y en a donc au plus $n\sigma(n-1)$.

Si γ désigne un lacet du réseau dual entourant l'origine, notons

$$S(p) = \sum_\gamma P_p(\gamma \text{ est fermé }).$$

On a :

$$\begin{aligned} S(p) &\leq \textstyle\sum_{n=1}^{\infty}(1-p)^n n\sigma(n-1) \\ &= \textstyle\sum_{n=1}^{\infty}(1-p)n\{q\lambda(2)+o(1)\}^{n-1} \quad \text{comme dans (2)} \\ &< \infty \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{si } (1-p)\lambda(2) < 1 \end{aligned} \tag{3}$$

1. Pour une démonstration plus rigoureuse de ce fait, voir [4], p386

De plus, on a $\lim_{p \to 1} S(p) = 0$.

On peut donc trouver $r \in]0;1[$ de telle sorte que pour $p > r$, $S(p) \leq 1/2$. On obtient ainsi que :

$$\begin{aligned} P_p(|C| = \infty) &= P_p(\text{aucun } \gamma \text{ ne soit fermé}) \\ &\geq 1 - S(p) \\ &\geq 1/2 \text{ si } p > r \end{aligned}$$

Ainsi, $p_c(2) \geq r$ et l'on a donc bien $p_c(2) < 1$. Ceci prouve le théorème 1.

Nous pouvons prouver maintenant le théorème plus général suivant:

Théorème 2 *Soit $\psi(p)$ la probabilité qu'il existe au moins une composante connexe infinie.*

Alors $\psi(p)$ vaut 0 si $p < p_c(d)$, 1 si $p > p_c(d)$.

L'événement A={ il existe au moins une composante connexe infinie } ne dépend pas de l'état d'un nombre fini d'arêtes: en effet ouvrir ou fermer un nombre fini d'arêtes peut scinder peut-être une composante connexe en plusieurs parties, mais au moins une de ces parties connexes sera infinie. Les variables aléatoires considérées (l'état des arêtes) forment un ensemble dénombrable de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées dont la tribu asymptotique contient donc cet événement A. Par la loi du {0,1} de Kolmogorov, nous obtenons donc que $\forall p, P_p(A) = 0$ ou 1.

Mais si $p < p_c$, nous avons $\psi(p) \leq \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} P_p(|C(x)| = \infty) = 0$.

Si, par contre, $p > p_c$, nous avons $\psi(p) \geq P_p(|C| = \infty) > 0$, donc $\psi(p) = 1$ vu la remarque précédente.

Ceci achève la démonstration du théorème 2.

1.3 Quelques résultats importants

1.3.1 $p_c(2) = \frac{1}{2}$

On ne connaît pas la valeur exacte de $p_c(d)$ dans le cas $d \geq 3$. En revanche, on sait prouver que dans le cas $d = 2$, p_c est égal à $\frac{1}{2}$. La preuve rigoureuse n'est pas facile et dépasse le cadre de cet exposé ; présentons toutefois les idées générales qui sont à sa base.

On a défini au paragraphe précédent le graphe dual $(\mathbb{L}^d)^*$, ainsi qu'une percolation sur ce graphe ; faisons l'opération inverse, et déclarons une arête de $(\mathbb{L}^d)^*$ ouverte (respectivement fermée) si l'arête de $\mathbb{L}^d$ qu'elle intersecte est fermée (respectivement ouverte). Ceci définit sur $(\mathbb{L}^d)^*$ une percolation de probabilité caractéristique $1 - p$.

On fait alors la remarque suivante (qui demande à être formalisée, ce qui n'est pas évident [2]) : s'il y a dans $\mathbb{L}^d$ une composante connexe infinie, il n'y a plus de place dans $(\mathbb{L}^d)^*$pour une composante connexe infinie. Ceci étant admis, on en déduit que

$$p > p_c \Rightarrow 1 - p \leq p_c.$$

On en déduit que $p_c \geq \frac{1}{2}$. Par dualité, on a également $1 - p > p_c \Rightarrow p \leq p_c$, d'où $1 - p_c \geq \frac{1}{2}$; en combinant ces deux inégalités, on obtient bien $p_c = \frac{1}{2}$.

1.3.2 Taille moyenne des composantes connexes

Au-delà de l'existence d'une composante infinie, un autre problème intéressant est celui de la taille moyenne des composantes connexes. Plus formellement, on pose

$$\chi(p) = E_p(|C|) = \infty . P_p(|C| = \infty) + \sum_{n=1}^{\infty} n . P_p(|C| = n)$$

2. cf par exemple [2], p.192, pour une démonstration rigoureuse.

Il est clair que pour $p > p_c$, on a $\chi(p) = \infty$, c'est pourquoi on considère également la taille moyenne des composantes connexes *finies*, c'est-à-dire :

$$\chi^f(p) = E_p(|C|, |C| < \infty) = \sum_{n=1}^{\infty} n.P_p(|C| = n)$$

On constate alors que pour $p < p_c$, on a $\chi(p) = \chi^f(p)$. De plus, χ est croissante sur $[0, p_c[$ et χ^f est décroissante sur $]p_c, 1]$. On sait montrer (mais cela n'est pas trivial) que pour $p < p_c$, on a $\chi(p) < \infty$; ce résultat est lié à une estimation sur la taille des composantes connexes, à savoir :

$$\forall n, P_p(|C| = n) \geq \exp(-\beta(p) n^{\frac{d-1}{d}}) \tag{4}$$

(où $\beta(p)$ est strictement positif si $p < p_c$).

Ce qui se passe au voisinage de p_c est plus difficile à déterminer. On sait en effet que $\theta(p_c) = 0$ en dimension 2, mais on n'a que des conjectures en dimension supérieure. On pense que $\chi(p)$ se comporte comme une puissance de $|p_c - p|$ au voisinage de p_c, c'est-à-dire que

$$\gamma = -\lim_{p \uparrow p_c} \frac{\log \chi(p)}{\log |p - p_c|} \tag{5}$$

existe dans $]0, +\infty[$. γ porte le nom d'*exposant critique*.

1.3.3 Unicité de la composante connexe infinie

Examinons le problème suivant : on sait, d'après le théorème 2, que, si $p > p_c$, le graphe obtenu en ne gardant que les arêtes qui sont ouvertes comporte presque sûrement au moins une composante connexe infinie. Si on note N le nombre (éventuellement infini) de composantes connexes infinies, quelle est la loi de N?

La suite de l'exposé consistera à démontrer le théorème suivant :

Théorème 3 *Soit $P_p(N = 0) = 1$, soit $P_p(N = 1) = 1$.*

Autrement dit, étant donné ce que l'on sait sur p_c :

a. Si $p < p_c$, alors (presque sûrement) il n'y a pas de composante connexe infinie — ce que l'on savait déjà par définition de p_c.

b. Si $p > p_c$, alors (presque sûrement) il y a exactement *une* composante connexe infinie — ce qui n'est pas trivial.

2 Démonstration du théorème 3

La démonstration se fait en trois étapes ; comme on l'avait introduit plus haut, notons N le nombre (aléatoire) de composantes connexes infinies dans le graphe. On prouve tout d'abord que N est constant presque sûrement (étape 1), puis qu'il est égal (presque sûrement) à 0, 1 ou ∞ (étape 2) ; enfin, on démontre qu'il est fini, ce qui achève la démonstration du théorème 3.

2.1 $\exists k, P_p(N = k) = 1$

La remarque essentielle est la suivante : N est invariant par translation, *i.e.* si ω désigne une configuration et T une translation, définie sur $\mathbb{L}^d$ comme découlant d'une translation au sens usuel sur $\mathbb{Z}^d$, alors $N(T(\omega)) = N(\omega)$. Pour prouver l'existence d'un tel k, nous aurons besoin d'un résultat classique de théorie ergodique.

Définition 1 *Soit $T : \Omega \to \Omega$ une application mesurable conservant la mesure (*i.e. *: pour tout A mesurable, on a $P_p(T^{-1}A) = P_p(A)$) : on dit que T est* mélangeante *si, pour tous événements A et B, on a :*

$$\lim_{n\to\infty} P_p(A \cap T^{-n}B) = P_p(A)P_p(B) \tag{6}$$

Théorème 4 *Soit $\mathcal{A}_0$ une algèbre de parties de Ω, et soit $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{A}_0)$ la σ-algèbre engendrée par $\mathcal{A}_0$. Si la relation (6) est vraie pour A et B dans $\mathcal{A}_0$, alors elle est vraie pour A et B dans $\mathcal{A}$. En particulier, si $\mathcal{F}_0$ est une algèbre de parties de Ω engendrant la tribu-produit $\mathcal{F}$ et si (6) est vraie pour A et B dans $\mathcal{F}_0$, alors T est mélangeante.*

Soit en effet A et B deux éléments de $\mathcal{A}$, et soit $\epsilon > 0$. Il existe A_0 et B_0 dans $\mathcal{A}_0$ tels que l'on ait $P_p(A\Delta A_0) < \epsilon$ et $P_p(B\Delta B_0) < \epsilon$ (où $X\Delta Y = (X - Y) \cup (Y - X)$). Alors, $T^{-n}B\Delta T^{-n}B_0 = T^{-n}(B\Delta B_0)$ a une probabilité inférieure strictement à ϵ. Il s'ensuit que pour tout n, $P_p((A \cap T^{-n}B)\Delta(A_0 \cap T^{-n}B_0)) < 2\epsilon$. En faisant tendre n vers ∞, et en prenant la limite inférieure, on obtient donc $|\liminf P_p(A\cap T^{-n}B) - P_p(A_0)P_p(B_0)| < 2\epsilon$. Mais on a choisi A_0 et B_0 de telle sorte que $|P_p(A)P_p(B) - P_p(A_0)P_p(B_0)| < 2\epsilon$. On a donc

$$|\liminf P_p(A\cap T^{-n}B) - P_p(A)P_p(B)| < 4\epsilon$$

quel que soit ϵ. On a une inégalité similaire pour la limite supérieure, donc $\lim P_p(A \cap T^{-n}B)$ existe et vaut $P_p(A)P_p(B)$, ce qu'on voulait.

Notons $\mathcal{F}_0$ l'algèbre des événements cylindriques, et T une translation quelconque non nulle de $\mathbb{Z}^d$: alors, la relation (6) est vraie pour tous A, B dans $\mathcal{F}_0$. En effet, un événement cylindrique ne dépend par définition que de l'état d'un nombre *fini* d'arêtes de $\mathbb{L}^d$, donc pour n assez grand les arêtes caractérisant A et $T^{-n}B$ forment deux ensembles disjoints ; alors, A et $T^{-n}B$ sont deux événements indépendants, et $P_p(A \cap T^{-n}B) = P_p(A)P_p(T^{-n}B) = P_p(A)P_p(B)$.

La translation T est donc mélangeante. Soit alors A_k l'événement $\{N = k\}$: comme toutes les arêtes sont équivalentes, on a $A_k = T^{-1}A_k$, et en appliquant (6) avec $A = B = A_k$, on obtient $P_p(A_k) = P_p(A_k)^2$, donc :

$$\forall k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}, P_p(N = k) \in \{0, 1\}.$$

De plus, comme N est à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$, on a

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_p(N = k) + P_p(N = \infty) = 1,$$

donc il existe un k tel que $P_p(N = k) > 0$. Alors, on a bien $P_p(N = k) = 1$, et la première étape de la démonstration est achevée.

2.2 $k \in \{0, 1, \infty\}$

Supposons alors que $P_p(N = k) = 1$ avec $k \in \{2, 3, \ldots\}$; notons A_n l'événement "$B(n)$ intersecte k composantes connexes infinies" : l'union (croissante) des A_n est l'événement "il y a au moins k composantes connexes infinies", autrement dit, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{N \geq k\}$. Or, $N = k$ presque sûrement : donc $P_p(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = 1$; d'après la propriété de la limite croissante, il existe donc un n tel que l'on ait

$$P_p(A_n) \geq \frac{1}{2},$$

ce que l'on supposera par la suite.

Si on part d'une configuration où il y a k composantes connexes infinies, et qui réalise A_n, et si l'on ouvre toutes les arêtes qui sont dans $B(n)$, on obtient une configuration où il n'y a plus qu'une composante connexe infinie. Or, la situation de départ a une probabilité strictement positive, et on n'a changé qu'un nombre fini d'arêtes: **donc** la situation d'arrivée a aussi une probabilité strictement positive, d'où $P_p(N=1)>0$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse $P_p(N=k)=1$. C'est ce "donc" qu'il reste à prouver rigoureusement.

On va définir une application $F:\Omega\to\Omega$, de la manière suivante : si $\omega\in\Omega$, $F(\omega)$ est la configuration qui coïncide avec ω sur le complémentaire de $B(n)$ et dans laquelle toutes les arêtes de $B(n)$ sont ouvertes (ce qui correspond à l'opération décrite précédemment). La clé de la démonstration est alors le résultat suivant :

Lemme 1 *Soit A un événement: alors, $P_p(F(A))\geq P_p(A)p^{|B(n)|}$. En particulier, si $P_p(A)>0$ et $p>0$, alors $P_p(F(A))>0$.*

Soit en effet A un événement, et soit $\overline{A}=F^{-1}(F(A))$. Il est clair que l'on a $A\subset\overline{A}$, donc $P_p(A)\leq P_p(\overline{A})$; il suffit alors de prouver que $P_p(F(A))\geq P_p(\overline{A})p^{|B(n)|}$. Pour ce faire, notons E_n l'image de F, *i.e.* l'ensemble des configurations dans lesquelles les arêtes de $B(n)$ sont toutes ouvertes. Par construction, si une configuration est dans $\overline{A}$, toute configuration obtenue en ne changeant que des arêtes de $B(n)$ sera encore dans $\overline{A}$. Donc, si l'on écrit les événements sous forme d'ensembles-produit indexés par les arêtes du réseau, alors :

$$\overline{A}=\{0,1\}^{B(n)}\times\{A_0\},$$

où A_0 désigne une configuration du sous-graphe ${}^cB(n)$ qui ne dépend que de A, et

$$E_n=\{1\}^{B(n)}\times\{0,1\}^{{}^cB(n)}.$$

Comme $B(n)\cap({}^cB(n))=\emptyset$, on en déduit que $\overline{A}$ et E_n sont indépendants, donc que $P_p(\overline{A}\cap E_n)=P_p(\overline{A})P_p(E_n)$. Il suffit pour conclure de remarquer que d'une part $\overline{A}\cap E_n=F(A)$ et que d'autre part $P_p(E_n)=p^{|B(n)|}$.

Appliquons ce lemme en prenant $A=A_n$: on a $P_p(A_n)>0$, donc $P_p(F(A_k))>0$. Mais d'après une remarque précédente, $F(A_n)\subset\{N=1\}$: par conséquent, $P_p(N=1)>0$, ce qui est en contradiction avec le fait que $P_p(N=k)=1$. Par conséquent, si k est fini, il vaut 0 ou 1, et on a bien $k\in\{0,1,\infty\}$.

2.3 $k\neq\infty$

Il reste donc le cas à éliminer $\{\ k=\infty\ \}$.Pour ce faire, nous allons avoir recours à un argument géométrique.

2.3.1 Notations et premières constructions

Supposons que $k=\infty$ et définissons tout d'abord une *trifurcation.* On dira que le sommet x, pour une configuration donnée, est une trifurcation si :

a. x appartient à une composante connexe infinie,

b. si l'on enlève x, la composante connexe infinie se transforme en 3 composantes connexes infinies, chacune appelée *branche sortant de x.*

c. il y a exactement 3 arêtes qui arrivent en x.

Nous noterons aussi T_x l'événement { x est une trifurcation }. Comme la probabilité P_p est invariante par translation, $P_p(T_x)$ est indépendante de x (tous les points du réseau sont équivalents). Ainsi

$$\frac{1}{|B(n)|}E_p(\sum_{x\in B(n)} I_{T_x}) = P_p(T_0) \tag{7}$$

Le fait que $k = \infty$ permet (par le même argument qui est utilisé pour éliminer le cas $k \in \{2, 3, ...\}$) de définir une boîte $B(n)$ assez grande pour qu'au moins trois composantes connexes infinies distinctes rencontrent la boîte de taille $B(n-2)$, avec une probabilité supérieure à $\frac{1}{2}$.

Pour montrer que $P_p(T_0) > 0$, nous allons définir une application qui, en ne changeant que les états des arêtes de la boîte $B(n)$, va transformer une configuration où la boîte rencontre 3 composantes connexes infinies en une configuration où il y a trifurcation en 0. Alors par le même argument que celui utilisé pour éliminer le cas $k \in \{2, 3, ..\}$, comme $P_p(\{B(n)$ rencontre 3 composantes connexes$\}) > 0$, on aura $P_p(T_0) > 0$, une fois proprement définie l'application utilisée.

On peut procéder de la manière suivante (présentée de façon informelle).

Choisissons, pour chaque configuration convenable de tout le réseau, 3 composantes connexes qui intersectent la boîte $B(n-2)$ (voir figure 2). On colorie alors chacune des composantes connexes choisies en bleu, rouge, jaune, le reste des arêtes ouvertes étant coloriées en noir. On sait que ces composantes rencontrent $B(n-2)$. Il y a donc un chemin bleu (respectivement rouge, jaune) qui part de $B(n-2)$ et qui va à l'infini, il n'a qu'un nombre fini de passages dans la boîte $B(n-1)$ et on prend la dernière arête reliant $B(n-1)$ à $B(n)$ avant sa sortie définitive de $B(n-1)$. Chaque chemin possible donne une telle arête et on en choisit une. L'extrémité de cette arête qui se trouve sur $B(n)$ est appelée *infini bleu* (respectivement rouge, jaune) ; elle est reliée à l'infini, dans la composante bleue, par un chemin à l'extérieur de $B(n-1)$.

Pour chaque infini coloré on a donc une arête orthogonale au bord de $B(n)$ qui rejoint l'infini coloré à $B(n-1)$.

Si l'on se restreint à la boîte $B(n)$, il n'y a qu'un nombre fini de possibilités pour les arêtes bleues, rouges et jaunes et les infinis bleus, rouges et jaunes.

Effacons tout ce qui se passe à l'intérieur de $B(n)$, sauf son bord et les 3 arêtes orthogonales aux bords de $B(n)$ et $B(n-1)$ dont les extrémités sur $B(n)$ sont les infinis colorés. Nous allons construire un chemin de chaque couleur prolongeant ces arêtes, ne rencontrant pas les autres, sauf en l'origine (voir figure 3).

Plusieurs situations se présentent :

a. On notera tout d'abord que les infinis colorés ne peuvent être au "coin" de $B(n)$. Ensuite, si l'arête issue de l'un d'entre eux arrive sur un coin de $B(n-1)$, par exemple une arête bleue, on peut toujours rajouter une arête bleue le long du bord de $B(n-1)$ sans rencontrer les autres arêtes colorées. En effet, dans le cas contraire, qui ne pourrait se présenter qu'en dimension 2, il n'existerait pas à l'origine un chemin joignant l'infini bleu à $B(n-2)$, il serait "coincé", même en dehors de la boîte, entre un chemin rouge et un chemin jaune. On se ramène donc à regarder les cas où l'on peut toujours faire un pas d'une couleur donnée vers l'intérieur, vers $B(n-2)$.

b. Si les 3 points sont sur 3 faces différentes, alors sur chaque face on va jusqu'au centre puis on va tout droit jusqu'en 0.

c. Si 2 appartiennent à la même face, ceux qui sont seuls sur une face ou ceux qui peuvent être reliés à une face où il n'y a personne en longeant le bord de $B(n-1)$ sans passer par un point d'une autre couleur longent le bord jusqu'à la médiatrice de ce côté puis vont tout droit jusqu'en 0. Celui qui est au milieu fait un pas vers l'intérieur parcourt la face de $B(n-2)$ où il se retrouve jusqu'au centre, puis va droit jusqu'à 0.

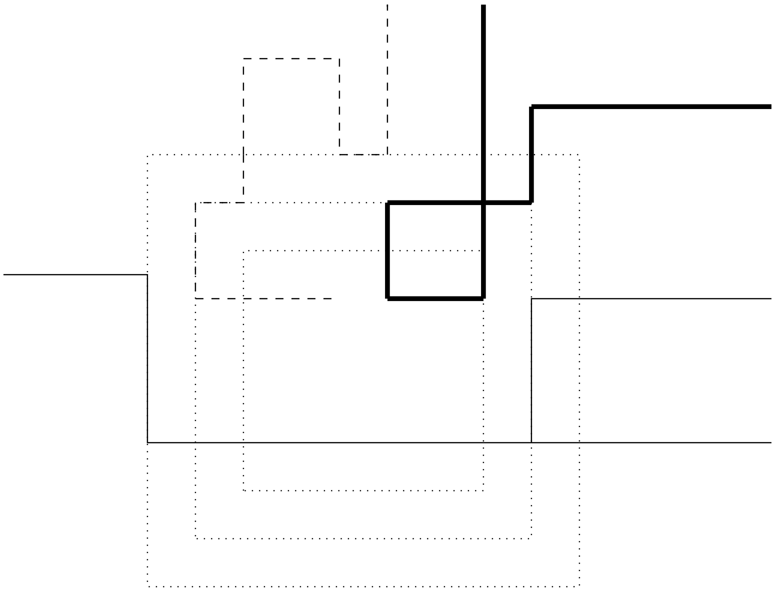

FIG. 2 – *Situation de départ*

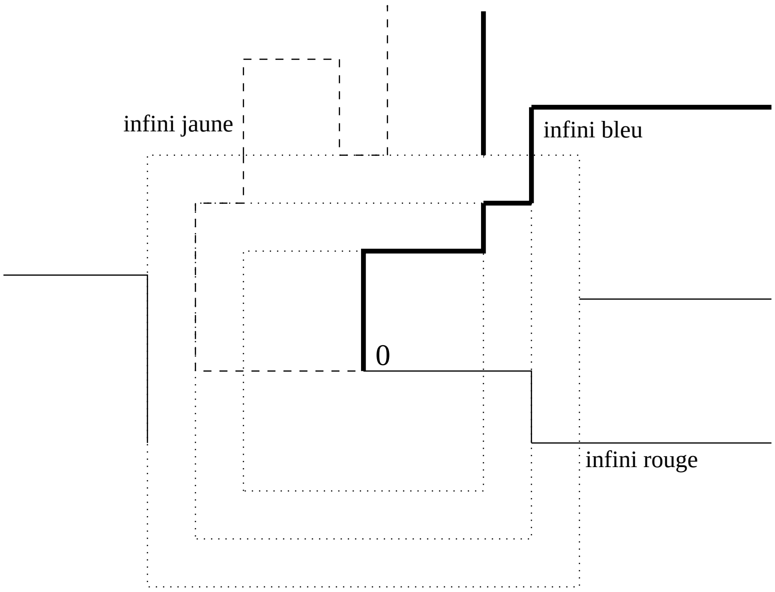

FIG. 3 – *Situation finale : trifurcation en zéro*

On obtient ainsi trois chemins qui vont jusqu'en 0 et qui, lorsqu'on replonge la boîte dans le réseau, donnent bien en zéro une trifurcation, chaque branche étant une partie infinie connexe des composantes connexes bleue, rouge et jaune. Notons que l'application sera bien définie une fois que l'on aura fixé une seule manière d'obtenir une trifurcation pour une configuration de la boîte donnée, ce qui est toujours possible puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de configurations pour la boîte (il suffit de choisir).

Nous voulons déduire du fait que $P_p(T_0) > 0$ une contradiction. Nous allons tout d'abord prouver le résultat suivant, de deux manières différentes :

Lemme 2 *Soient B le nombre de branches infinies sortant de la boîte et T le nombre de trifurcations dans la boîte. Alors*

$$B \geq T$$

2.3.2 Avec un algorithme...

$B(n)$ étant fixée comme ci-dessus, soit $J_1, J_2, ..., J_m$ la liste des composantes connexes infinies intersectant $B(n)$. Nous voulons comparer le nombre de trisections de chaque J_i au nombre d'arêtes de J_i sortant de $B(n)$. L'algorithme est le suivant :

a. On initialise pour la composante i , b_i et t_i à 0.

b. S'il n'y a pas de trifurcation de la branche J_i dans la boîte, on s'arrête là.

c. Sinon, on prend une trifurcation, elle délimite 3 branches.On va formaliser le raisonnement en construisant un nouveau graphe, abstrait, dont le noeud initial représentant cette trifurcation est décomposé en trois parties, une pour chaque branche. On décrète que $b_i \leftarrow 3$, qui représentera un minorant du nombre de branches infinies sortant de la boîte, et que $t_i \leftarrow 1$, qui représentera le nombre de trifurcations.

d. Pour chacune des branches, on fait une liste de toutes les trifurcations de la boîte qu'on peut atteindre à partir de la trifurcation mère (celle qui est représentée par le noeud initial dans le graphe), par un chemin sortant éventuellement de la boîte mais sans passer par d'autres trifurcations de la boîte. On crée pour chaque trifurcation de cette liste (il y en a un nombre fini) un noeud composé de 3 cases correspondant à chacune des branches et on complète le graphe en reliant la case 1 à la case de la branche de la trifurcation mère à laquelle la trifurcation fille appartient. A chaque ajout de trifurcation dans le graphe , on fait $b_i \leftarrow b_i + 1$ et $t_i \leftarrow t_i + 1$ et on ajoute en fin de liste toutes les trifurcations qu'on peut atteindre de la manière précédente à partir de la trifurcation qu'on vient d'ajouter au graphe.

e. On recommence jusqu'à épuisement des trifurcations (*i.e.* de la liste que l'on a créée).

Chaque trifurcation de J_i est atteinte au moins une fois dans cet algorithme. En effet, une trifurcation de la branche J_i peut-être tirée en premier, sinon, elle appartient à une des branches ; un chemin relie donc la trifurcation initiale à cette trifurcation, on regarde toutes les trifurcations que ce chemin parcourt, la première est donc mise dans la liste à la deuxième étape de l'algorithme et ainsi de suite, au bout d'un nombre fini d'étapes on crée le noeud correspondant à cette trifurcation.

Le raisonnement précédent montre aussi que tous les chemins possibles dans le réseau pour aller d'une trifurcation à une autre sont bien représentés dans le graphe, de manière surjective. (Plusieurs chemins du réseau peuvent coder le même chemin dans le graphe, mais tout chemin du graphe correspond à au moins un chemin du réseau.)

Si on passait, dans l'algorithme, plusieurs fois par la même trifurcation x, cela voudrait dire qu'il y a deux chemins distincts dans le graphe qui mène de la racine à cette trifurcation. Il y a donc au moins une trifurcation t qui appartient à l'un des chemins mais pas à l'autre. Si le chemin qui va de t à x est dans la branche 2 ou 3 de t, alors on peut aller de t à x et de x à la racine puis de la racine à t, il y a une boucle et enlever t ne sépare donc pas J_i en 3 composantes connexes distinctes, ce qui contredit le fait que t soit une trifurcation. Si le chemin était dans la branche 1, alors l'arête 1 qui mène à t serait parcourue dans les deux sens, ce ne serait pas un vrai chemin, pris en compte dans l'algorithme. Au total t_i compte bien le nombre de trifurcations et à chaque étape une trifurcation rajoute bien une

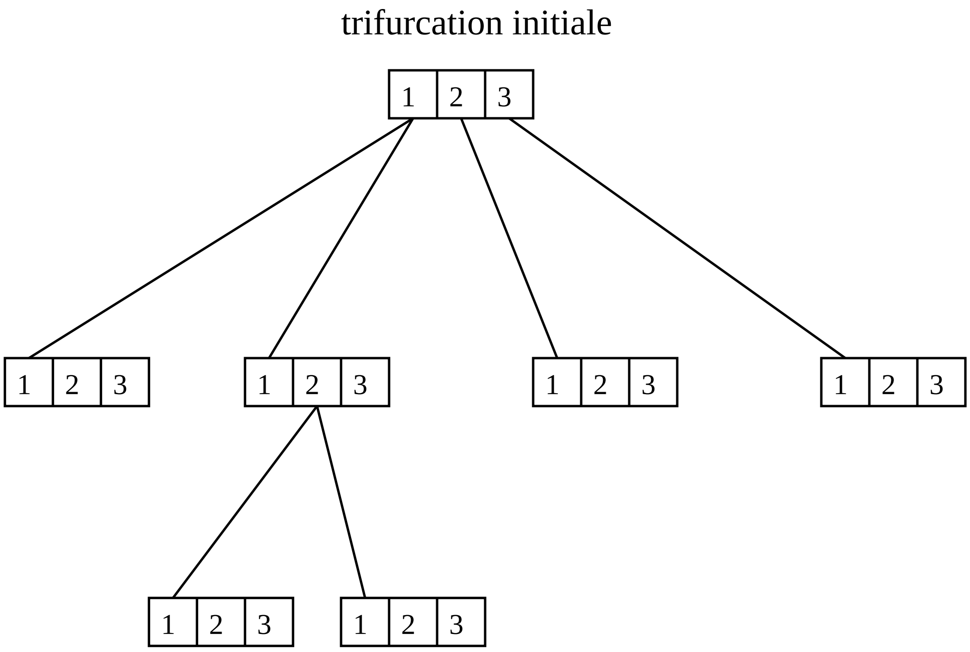

FIG. 4 – *Graphe des trifurcations créé par l'algorithme*

branche infinie sauf à la première où il y en a 3 ; de plus, à chaque étape, $b_i \geq t_i$ et donc le nombre de trifurcations dans J_i est plus petit que le nombre total de branches infinies de J_i sortantes de la boîte. En sommant ensuite sur i, on obtient bien le résultat voulu.

2.3.3 Par récurrence...

On procède par récurrence sur T. S'il n'y a pas de trifurcations dans la boîte, alors de manière évidente $B \geq T$.

Supposons donc $T > 0$. Il existe une trifurcation $t \in B(n)$ vérifiant la propriété suivante : dans l'une des trois branches qui sortent de t, il n'y a pas d'autre trifurcation de $B(n)$; supposons en effet qu'aucune trifurcation ne satisfasse cette condition, et notons t_0 une trifurcation quelconque. On construit alors une liste de trifurcations en choisissant t_1 dans l'une des branches sortant de t_0, puis, après avoir construit t_n, en choisissant t_{n+1} dans une des deux branches sortant de t_n qui ne contiennent pas t_{n-1}. On dispose alors d'une suite infinie $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de trifurcations, et il découle de la définition d'une trifurcation que les t_n sont deux à deux distinctes. Or, elles sont toutes dans $B(n)$:ceci est impossible.

Soit donc t une telle trifurcation : l'une des branches qui sortent de t ne contient pas de trifurcation. Imposons alors à toutes les arêtes de cette branche d'être fermées, et considérons le graphe que l'on obtient alors : il a $T - 1$ trifurcations et au plus $B - 1$ branches infinies sortant de $B(n)$. Par hypothèse de récurrence, on a donc $B - 1 \geq T - 1$, d'où $B \geq T$, ce qu'on voulait.

2.3.4 Fin de la démonstration

Pour chaque branche infinie, on a au moins un point du bord de la boîte qui y appartient. Ainsi on a, d'après (7), en sommant sur toutes les composantes connexes infinies :

$$\begin{aligned} 0<P_p(T_0) &= \frac{E_p(\sum_{i\in\{1,\ldots,m\}} t_i)}{|B(n)|} \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} \frac{E_p(\sum_{i\in\{1,\ldots,m\}} b_i)}{|B(n)|} \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} \frac{|\partial B(n)|}{|B(n)|} \\ &\leq 0, \end{aligned}$$

ce qui est absurde.

Finalement, $k \in \{0,1\}$ et d'après ce que nous avons dit au sujet de léxistence de p_c, on a le résultat suivant :

a. pour $p > p_c$, il y a presque sûrement une seule composante connexe infinie,

b. pour $p < p_c$, presque sûrement, il n'y a pas de composantes connexes infinies.

Ce qu'il fallait démontrer.

3 Quelques questions ouvertes

Le théorème 3 est l'un des rares résultats que l'on sache prouver de manière élémentaire, et même après le développement d'outils mathématiques bien adaptés à la percolation, beaucoup de questions sont restées sans réponse. Nous nous proposons d'exposer ici certains résultats et conjectures concernant le modèle décrit plus haut, puis de présenter d'autres modèles de percolation.

3.1 Avec le même modèle...

3.1.1 Au voisinage de p_c

Comme le théorème 3 le prouve, on sait à peu près ce qui se passe quand la probabilité caractéristique est strictement supérieure à la probabilité critique : il y a une composante connexe infinie unique, qui contient chaque point avec une probabilité strictement positive. On sait aussi prouver des inégalités similaires à (4).

On a également des informations relativement précises dans le cas $p < p_c$ (informations qui ne sont le plus souvent que qualitatives). Un problème intéressant est l'étude de ce qui se passe quand p varie au voisinage de p_c : par exemple, comment évoluent χ^f et θ? On sait prouver que ces deux fonctions sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1] - \{p_c\}$, et on conjecture les faits suivants :

- θ est continue en p_c ; autrement dit $\theta(p_c) = \theta(p_c^+) = 0$, donc pour $p = p_c$ il n'y a pas de composante connexe infinie (résultat que l'on sait par ailleurs prouver dans le réseau $\mathbb{L}^2$). Il apparaît même que p_c est logarithmiquement équivalent (au sens de (5)) à une puissance de $p - p_c$ pour $p > p_c$.

- Il existe pour χ et χ^f des exposants critiques (comme on l'a signalé en (5), à la fois en p_c^+ et en p_c^- (qui ont des valeurs a priori différentes).

On peut définir des percolations sur d'autres formes de réseaux (triangulaire, hexagonal, ...). On observe dans chaque cas l'existence d'exposants critiques, et on conjecture que ceux-ci ne dépendent pas de la forme du réseau, mais uniquement de la dimension.

3.1.2 En dimension supérieure

Pour $d \geq 3$, en plus de l'étude précédente, qui reste valable, on sait que $p_c < \frac{1}{2}$, mais aucune valeur exacte n'est connue à ce jour. De plus, il est généralement admis que p_c ne prend aucune valeur remarquable pour $d \geq 3$.

On peut de plus, pour $d = 3$, se poser le problème suivant : existe-t-il des "chaînes" infinies ? Nous allons tout d'abord définir ce qu'est une chaîne ; pour ce faire, plongeons $\mathbb{L}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, et imaginons que les arêtes sont constituées de caoutchouc : on a alors une relation d'équivalence définie par $x\mathcal{R}y$ si, quand on prend x dans une main et y dans l'autre et qu'on tire, on ne peut pas les séparer. Une chaîne est une classe d'équivalence pour cette relation, et cette notion correspond à la notion intuitive de chaîne.

Il est clair que $\rho(p) = P_p$(il existe une chaîne infinie) est une fonction croissante de p, et que pour $p > p_c$, on a $\rho(p) = 1$: en effet, la composante connexe infinie constitue alors une chaîne infinie à un "maillon".

Notons $p_c^c = \sup\{p, \rho(p) = 0\}$, probabilité critique similaire à p_c : on sait prouver que $p_c^c < p_c$, mais on ne connaît pas sa valeur exacte.

3.2 Deux autres modèles de percolation

Beaucoup de modèles de percolation ont été développés ; signalons-en deux en particulier.

3.2.1 Percolation par sites

Changeons de modèle, et faisons porter p sur la présence ou l'absence des sommets et non des arêtes ; on considère alors le graphe formé par les arêtes reliant deux sommets présents. On obtient un comportement similaire à celui observé plus haut, mais la probabilité critique obtenue p_c^s est strictement supérieure à p_c.

3.2.2 Problème des miroirs

Nous abandonnons dans ce paragraphe tout le formalisme introduit précédemment. Il s'agit ici de modéliser, par exemple, l'opacité ou la transparence d'un corps. Pour ce faire, on se place en dimension 2 (!) et on procède comme suit.

On place en chaque sommet, avec une probabilité p, un "miroir", avec une orientation aléatoire (*i.e.* : pas de miroir avec probabilité $1 - p$, un miroir orienté selon la première bissectrice avec probabilité $p/2$, et un miroir orienté selon la deuxième bissectrice avec probabilité $p/2$), ce qui modélise la réflexion de la lumière due à la présence des molécules.

On envoie alors un faisceau lumineux depuis "l'infini du bas" vers le haut : se propage-t-il jusqu'à "l'infini du haut" (corps transparent), ou fait-il demi-tour (corps opaque) ? Ou, ce qui revient au même mais est plus facile à exprimer mathématiquement, on envoie depuis l'origine un faisceau lumineux dirigé vers le haut : se propage-t-il jusqu'à l'infini ou revient-il à l'origine pour suivre une trajectoire périodique ?

Pour $p = 1$, on sait que le rayon lumineux ne se propage pas jusqu'à l'infini ; ceci provient essentiellement du fait que, quand $p = p_c$, il n'y a pas de composante connexe infinie. Notre connaissance de ce qui se passe dans ce modèle est très limitée. En particulier, on ne sait pas s'il existe une probabilité critique, car la probabilité de propagation n'est pas une fonction croissante de p.

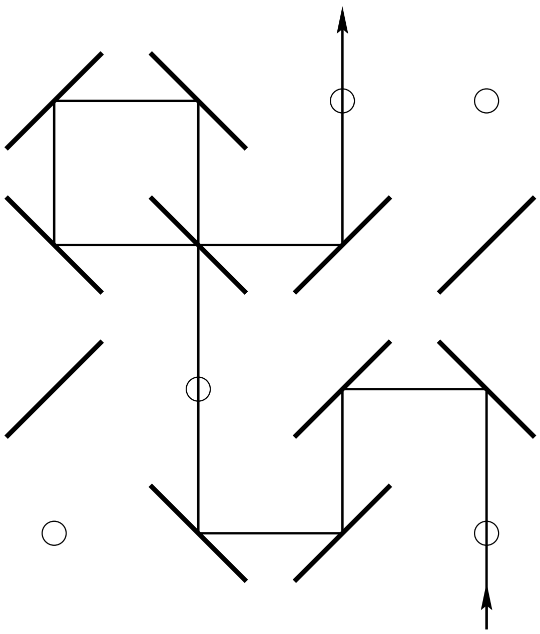

FIG. 5 – *Un exemple de milieu transparent*

Conclusion

Nous n'avons ici présenté qu'un bref aperçu des principaux résultats ; le lecteur trouvera dans les ouvrages cités plus bas (en particulier dans [2]) plus de renseignements, ainsi que des démonstrations de certains des résultats que nous signalons.

La percolation est un exemple très simple de modèle utilisé en physique statistique pour simuler l'interaction entre des particules ; toutefois, la connaissance mathématique que nous avons des phénomènes physiques se limite encore à des modèles relativement simples, qui sont difficiles à étudier rigoureusement. En particulier, si l'interaction entre deux particules dépend de l'état de ces particules, on perd l'hypothèse de l'indépendance des variables introduites précédemment.

Table des matières

Table des figures

Références

[1] P. Billingsley. *Ergodic theory and information.* John Wiley & Sons, 1965.

[2] G. Grimmet. *Percolation.* Springer-Verlag, 1989.

[3] G. Grimmet. *Percolation and disordered systems.* Cours donné à l'École d'été de Saint-Flour, 1996.

[4] H. Kesten. *Percolation theory for mathematicians.* Birkhäuser, 1982.