Sylvain Rubenthaler

May 8, 1997

1 Préliminaires

1.1 Dimension de Hausdorff (Rappels)

Soit A sous-ensemble de $\mathbb{R}$. On pose

$$\mathcal{H}_\delta^s(A) = \inf \left\{ \sum_{i\in I} (diam(B_i)^s,\ \text{où}\ (B_i) \leq \delta \text{ et } A \subset \cup_{i\in I} B_i \right\} \tag{1}$$

(on dit que les B_i forment un δ-recouvrement). Puis on pose

$$\mathcal{H}^s = \lim_{\delta\to 0} (\mathcal{H}_\delta^s).$$

Proposition 1 *Si $\mathcal{H}^s < +\infty$ alors $\forall t > s$, $\mathcal{H}^s < +\infty$ et donc il existe une valeur critique s telle que :*

$$\begin{array}{lcl} t < s & \Rightarrow & \mathcal{H}^s = +\infty \\ t > s & \Rightarrow & \mathcal{H}^s = 0. \end{array}$$

On pose alors $s = dim_H(A)$ et on appelle s la dimension de Hausdorff de A.

Démonstration : On remarque d' abord que à s fixé,$\mathcal{H}_\delta^s(A)$ est une fonction décroissante de δ parce que tout δ-recouvrement est aussi un δ'-recouvrement pour $\delta' \geq \delta$.Donc la limite $\mathcal{H}_\delta^s(A)$ est soit un réel,soit $+\infty$.
On suppose $\mathcal{H}^s < +\infty$.Soit $t > s$,pour un δ-recouvrement $(B_i)_{i\in I}$ de A on a (si $\delta < 1$):

$$\sum_{I\in I} diam(B_i)^t \leq \sum_{I\in I} diam(B_i)^s \times \delta^{t-s}$$

donc

$$\mathcal{H}_\delta^t(A) \leq \mathcal{H}_\delta^s(A) \times \delta^{t-s}$$

et quand on fait $\delta \to 0$ on a $\mathcal{H}^t(A) = 0$.

1.2 Methode de calcul

Pour μ une mesure finie positive sur $\mathbb{R}$ et pour $s \geq 0$ on définit en tout point x le s-potentiel par (avec pour convention que les intégrales se font sur tout $\mathbb{R}^n$):

$$\Phi_s(x) = \int \frac{d\mu(y)}{|x-y|^s}$$

et on définit la μ-énergie par:

$$I_s(\mu) = \int\int \frac{d\mu(x)d\mu(y)}{|x-y|^s} = \int \Phi_s(x)d\mu(x)$$

Théorème 1 *Soit F borélien de $\mathbb{R}^n$ et soit μ une mesure positive finie sur F telle que $I_s(\mu) < +\infty$ et μ absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue(notée λ),alors $\mathcal{H}^s = \infty$ et donc $dim_H(F) \geq s$.*

Démonstration: on suppose $I_s(\mu) < +\infty$. Posons

$$F_1 = \left\{ x \in F \ / \ \limsup_{r\to 0} \left(\frac{\mu(B_r(x))}{r^s} \right) > 0 \right\},$$

on a $\mathcal{H}^s(F) \geq \mathcal{H}^s(F$
$F_1)$ pour $x \in F_1$ on extrait les suites $(r_i)_{i\geq 0}$ et $(q_i)_{i\geq 0}$ telles que:

- (r_i) décroissante
- $\forall i \geq 0$, $\mu(B_{ri}) > \varepsilon r_i^s$ et $r_{i+1} < q_i < r_i$.
- si $A_i = B_{r_i}(x) \setminus \overline{(B_{qi}(x))}$, on veut $\mu(A_i) \geq \varepsilon \times r_i^s/4$ (c'est possible car $\mu << \lambda$)

Alors,

$$\Phi_s(x) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} \frac{d\mu(x)}{|x-y|^s} \geq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{4}\varepsilon \frac{r_i^s}{r_i^s} = \infty.$$

Or $I_s(\mu) = \int \Phi_s(x)d\mu(x) < \infty$ donc $\mu(F_1) = 0$.

Lemme 1 *Si* $\limsup_{r\to 0}(r^{-s}\mu(B_r(x) \cap F)) < c$ *pour tout* $x \in F$, *alors* $\mathcal{H}(F) \geq \frac{\mu(F)}{c}$.

Démonstration:
rappel :

$$\limsup_{r\to 0}(f(r)) = \lim_{r\to 0}(sup_{(0,r)}f(t))$$

pour $\delta > 0$,soit

$$F_\delta = \{x \in F, \exists\, \varepsilon > 0 \text{ tel que } \mu(B_r(x) \bigcap F) < (c-\varepsilon)r^s, \forall\ 0 < r \leq \delta\}$$

soit (U_i) un δ-recouvrement de F,si x $\in U_i \bigcap F_\delta$ comme $U_i \subset B_{diam(U_i)}(x)$ on a

$\mu(Ui) \leq \mu(B_{diam(U_i)}(x)) < c(\mid U_i \mid)$ (on note $|U_i| = diam(U_i)$)
donc

$$\mu(F_\delta) \leq \sum_{i,\mu(U_i)\cap F_\delta \neq \emptyset} (\mu(U_i)) \leq \sum c|U_i|^s$$

donc

$$\mu(F_\delta) \leq c\mathcal{H}^s_\delta(F) \leq c\mathcal{H}^s(F)$$

(car $\delta \mapsto (H)^s_\delta(F)$ fonction croissante)
alors,comme $\bigcup_{\delta>0} F_\delta = F$ on a $\mu(F) \leq c\mathcal{H}^s(F)$
explication : soit $x \in$ F,

$$\varepsilon = -\limsup_{r\to 0}\left(\frac{\mu(B_r(x)\bigcap F)}{r^s}) + c\right)$$

(on a $\varepsilon > 0$),alors il existe $\delta > 0$ tel que $\forall r \in)0,\delta), \mu(B_r(x)\bigcap F) < (c-\varepsilon)r^s$

Retour au théorème:
alors $\forall c > 0 : \mathcal{H}^s(F) \geq \frac{\mu(F\backslash F_1)}{c} \geq \frac{\mu(F)-\mu(F_1}{c} \geq \frac{\mu(f)}{c}$
donc $\mathcal{H}^s(F) = \infty$,donc $dim_H(F) \geq s$

2 Ensemble de Cantor aléatoire en dimension 2

2.1 Construction

On suppose que l' on dispose de variables aléatoires uniformément réparties d' espace de départ Ω (" ensemble des possibles ") dont l' élément générique sera noté ω et à valeurs dans $[0,1]$: $C_{k,i}$ avec $k \geq 1$ et i dans $\{1,...9\}$.Prenons p un réel de $[0,1]$.Si $k \geq 1$,on note $\mathcal{F}_k = \sigma(C_{k,i}, 1 \leq i \leq 9, k \geq 1)$ et $\mathcal{F}_0$ la tribu triviale.
(Rappel : $\sigma(X_1,...,X_n)$ avec $X_1,...,X_n$ des variables aléatoires est la tribu engendrée par $X_1,...,X_n$, c' est aussi la plus petite tribu qui rende ces variables mesurables.)
Prenons I_0 le carré $[0,1]\times[0,1]$ dans $\mathbb{R}^2$ et $I_{k,i_1,...,i_k}$ le carré de coté 3^{-k} qui est le i_k^{eme} carré de $I_{k-1,i_1,...,i_{k-1}}$,c' est une définition par induction sachant que l' on définit ainsi le i^{eme} carré d' un carré: (faire un petit dessin)

Pour $k \geq 1$,notons E_k l' ensemble des carrés de type $I_{k,i_1,...,i_k}$ avec $C_{1,i_1} < p, ..., C_{k,i_k} < p$ et E'_k tous les carrés de la forme $I_{k,i_1,...,i_k}$,et prenons $E_0 = \{I_0\}$.Enfin posons

$$F = \bigcap_{k \geq 0} (I \in E_k).$$

Dans la suite,nous allons calculer la dimension de Hausdorff de F.
Voici quelques exemples en fonction de p:

2.2 Théorème sur la dimension

Théorème 2 *F a la probabilité q d ' être vide,où q est la plus petite racine > 0 de l' équation :*

$$f(t) \equiv \sum_{j=0}^{m} P(N = j)t^j = t \tag{2}$$

(où N est la probabilité que dans le module de processus ci-dessus on ait N petits carrés),et $P(dim_H = s) = 1 - q$ où s solution de $9p \times 3^{-s} = 1$.

Démonstration:
Soit Z_k le nombre de carrés restant au temps k (c ' est à dire quand on a appliqué k fois le processus de division).On note $\mathcal{F}_k$ la tribu des informations au temps k. On pose $F_k(t) = E(t^{Z_k}), pour t \in \Re$

sous-additive

$$\begin{aligned} E(t^{Z_{k+1}}) &= E(E(t^{Z_{k+1}}|Z_{k+1})) \\ &= E(E(t^{\sum_{i=1}^{Z_k} N_i}|Z_k) \\ &= E(f(t)^{Z_k}) \\ &= F_k(f(t)) \end{aligned}$$

on obtient par récurrence:$F_k(t) = f^k(t), car F_0(t) = t$,alors :

$$\begin{aligned} P(E_k = \emptyset) &= P(Z_{k+1} = 0) \\ &= f^{k+1}(0) \\ &= f(f^k(0)) \\ &= f(P(Z_k = \emptyset)) \end{aligned}$$

$P(Z_0 = \emptyset)$ donc $P(F = \emptyset)$ est bien la plus petite racine > 0 de (2).Puis,en notant E_k l ' ensemble des carrés restant au temps k et $|C|$ l' aire d' un carré C:

$E(\sum_{C\in E_{k+1}}|C|^s|\mathcal{F}_k) = 9p\times 3^{-s}\times E(\sum_{C\in E_k}|C|^s)$
$= E(\sum_{C\in E_k})$
Notons $M_k = \sum_{C\in E_k}|C|^s$, c' est une martingale,donc :

$$\sum_{C\in E_k}|C|^s \to X\; p.s.\; quand\; k\to\infty \tag{3}$$

On sait (cf cours de probabilités) que $\forall k, E(\sum_{C\in E_k}|C|^s) \geq E(X)$ donc X est fini p.s. Si $C\in E_k$ alors $|C| = \frac{1}{3^k}$ donc $\mathcal{H}^s_\delta(F) \leq \sum_{C\in E_k}|C|^s$ dès que $K \geq \frac{-log(\delta)}{log(3^s)}$.Donc $E(\mathcal{H}^s_\delta) \leq E(M_k)$.On fait $\delta\to 0$ et on a $dim_H(F)\leq s$ avec probabilité 1.

Il faut ensuite minorer $dim_H(F)$ par s,on va se servir pour cela du théorème démontré en (1.2).
Pour B borélien du plan ,on définit la mesure extérieure $\nu*(B) = lim_{k\to\infty}\{\sum|J|^s, J\in E_k, J\bigcap B\neq\emptyset\}$ (c' est la limite d' une suite décroissante positive donc elle a une limite).On rappelle les axiomes à vérifier:

- $\mu*(\emptyset) = 0$
- $\mu*$ croissante
- $\mu*$ est σ sous-additive

On fabrique alors une mesure à partir de $\mu*$ (cf cours d' intégration).Les μ-mesurables seront:$\{B$ borélien tel que $\forall$ A borélien , $\mu*(A) = |nu(A\bigcap B) + \mu*(A\bigcap B^c)\}$.
Pour montrer que tous les boréliens sont μ-mesurables ps,montrons que $\forall$ B et C boréliens disjoints: $\mu*(B\bigcup C) = \mu*(B)+\mu*(C)$.Il faut montrer que $lim_{k\to\infty}\sum_{J\in E_k, J\cap B\cap C}|J|^s = 0$.
Soit $\varepsilon>0$.Supposons que l' on ait des recouvrements de carrés (c' est possible avec des arguments de régularité): $B\subset\bigcup J_i$,$C\subset\bigcup J_r$,avec les J_i et J_r dans E'_k et $\sum J_i - \lambda(B) < \varepsilon$, $\sum J_r - \lambda(C) < \varepsilon$ (λ la mesure de Lebesgue,E'_k l' ensemble des carrés de E_k possibles).Alors $\lambda(B)+\lambda(C) = \lambda(B\bigcup C) \leq \sum|J_i| + \sum|J_r|$,d' où $\sum_{J|J\cap B\cap C\neq\emptyset}|J| \leq 2\varepsilon$.
Puis

$$\begin{aligned} E(\sum_{J\in E'_k|J\cap B\cap C\neq\emptyset}|J|^s) &= \sum_{J\in E'_k|J\cap B\cap C\neq\emptyset}|J|\times p^k\times 3^{-sk+3k} \\ &= \sum_{J\in E'_k|J\cap C\cap B\neq\emptyset}|J|\times 3^{-k}. \end{aligned}$$

Donc on a bien la limite cherchée.
La mesure μ ainsi définie vérifie : pour $I\in E_k$, $E(\mu(I)|\mathcal{F}_k) \leq |I|^s$ ps (par (3) et auto-similarité du processus).

Commentaires : c' est tout ce que j' ai trouvé , cela ne me satisfait pas tellement à cause des ps(presque sûrement) qui traînent un peu partout et qui ne veulent pas dire grand chose

Autre idee pour contouner les problemes de denombrabilite:ne regerder que les boreliens à extrémités rationnelles

Quand on considère un carré,on note B_q la bande suivante: (faire un dessin)

Soit $I \in \mathcal{F}_k$,on regarde d' abord,pour $t < s$:(où $x \wedge y$ est le carré de E_k contenant x et y avec k le plus grand possible

$$\int\int_{x\wedge y=I, x\in I_1', y\in I_2'} |x-y|^{-t} d\mu(x)d\mu(y) \leq \mu(I_2' \times \sum_{q=1}^{+\infty} \int_{x\in B_q} \frac{1}{3^{-qt}} d\mu(x)d\mu(y)$$

$$E\left(\int\int_{x\wedge y=I, x\in I_1', y\in I_2'} |x-y|^{-t} d\mu(x)d\mu(y)|\mathcal{F}_{k+1}\right) \leq E(\mu(I_1')|\mathcal{F}_{k+1}) \times \sum_{q=1}^{+\infty} E(\mu(B_q)|\mathcal{F}_{k+1}) \times 3^{qt}$$

Remarque : B_q contient au plus 2×3^q carrés de E_{k+1+q},soit N_q le nombre de carrés de E_{k+1+q} qui sont dans B_q,$E(N_q|\mathcal{F}_{k+1}) \leq 2\times(3p)^q$,posons $3p = 3^\alpha$ (on a alors $\alpha = ln(3p)/ln(3)$)

$$E\left(\int\int_{x\wedge y=I, x\in I_1', y\in I_2'} |x-y|^{-t} d\mu(x)d\mu(y)\right) \leq E(|I_1'|^s) \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{2\times 3^{q\alpha}}{3^{2s(k+1+q)}} \times 3^{qt}$$

Explication:

$$\begin{aligned} E(\mu(B_q)|\mathcal{F}_{k+1}) &= \sum_{L\in E_{k+1+q}, L\subset B_q} E(\mu(L)|\mathcal{F}_{k+1}) \\ &= \sum_{L\in E_{k+1+q}, L\subset B_q} E(E(\mu(L)|\mathcal{F}_{k+1+q})|\mathcal{F}_{k+1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E\left(\int\int_{x\wedge y=I, x\in I_1', y\in I_2'} |x-y|^{-t} d\mu(x)d\mu(y))\right) &\leq E(|I_1'|^s)\times\sum_{q=1}^{+\infty} 2\times 3^{-s(k+1)}3^{q(\alpha-2s+t)} \\ &\leq 3^{-s(k+1)}\times 2\times\frac{3^{\alpha-2s+t}}{1-3^{\alpha-2s+t}}\times E(|I_1'|^s) \end{aligned}$$

en effet $\alpha-2s<0$ car $t<s$ et $s=ln(9p)/ln(3)>\alpha=ln(3p)/ln(3)$
On remarque que cette majoration est encore valable pour $x\in I_i, y\in I_j$ avec $I_i\neq I_j$ quelconques dans $I\in E_k$.Donc:

$$\begin{aligned} E\left(\int\int_{x\wedge y=I} |x-y|^{-t} d\mu(x)d\mu(y)\right) &\leq 18\times 3^{-s(k+1)}\times\frac{3^{\alpha}-2s+t}{1-3^{\alpha-2s+t}}\times E(|I_1'|^s) \\ &\leq C\times E(|I'|^s)\times 3^{-s(k+1)} \end{aligned}$$

(C une constante)
Alors:

$$\begin{aligned} E\left(\int\int_{x\in F, y\in F} |x-y|^{-t} d\mu(x)d\mu(y)\right) &\leq C\times\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{I'\in E_k} E(|I'|^s)\times 3^{-s(k+1)} \\ &\leq C\sum_{k=0}^{+\infty} 3^{-s(k+1)} \\ &< +\infty \end{aligned}$$

(car $F=\bigcap_{k=1}^{+\infty} E_k$)
donc la t-énergie de μ est finie avec une probabilité 1 $P(\mu(F)<+\infty)=1$ donc par le théorème de 1.2 (qui s' applique alors) $dim_H\geq t$ avec une probabilité 1 $(\forall t<s)$

Conclusion:

$$P\left(dim_H F=\frac{ln(9p)}{ln(3)}\right)=1$$

3 Conséquences et existence d' une probabilité critique

3.1 Etude en fonction de p

Proposition 2 *A p fixé,soit q la plus petite racine positive de(on réécrit 2):*

$$t = (pt + 1 - p)^9$$

alors F est vide avec la probabilté q.On vérifie que pour $p \leq 1/9$ alors $q = 1$.Pour $1/9 < p \leq 1$ on a $0 < q < 1$ et avec la probabilité $1 - q$:$dim_H(F) = ln(9p)/ln(3)$.

3.2 Lemmes techniques

Lemme 2 *Si $f : F \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est une application lipschitzienne alors $dim_H(f(F)) \leq dim_H(F)$*

Démonstration :
on prend x et y dans F distincts
$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ donnée par $f(z) = |z - x|$

$$\begin{aligned} \forall z, w \text{ on a } |f(z) - f(w)| &= ||z - x| - |w - x|| \\ &\leq |z - x - w + x| \\ &\leq |z - w| \end{aligned}$$

par le lemme (2) $dim_H(f(F)) \leq dim_H(F) < 1$,par régularité de la mesure de Lebesgue (notée λ),on a alors $\lambda(f(F)) = 0$ donc $f(F)^c$ est dense dans $\Re$
alors $\exists r$ n' appartenant pas à f(F) tel que $0 < r < f(y)$ et : $F = \{z \in F, |z-x| < r\} \bigcup \{z \in F, |z - x| > r\}$, c' est une union disjointe de deux ouverts.

Lemme 3 *Un ensemble $F \subset \mathbb{R}^n$ tel que $dim_H(F) < 1$ vérifie:$\forall$ x et y dans F,$\exists U$ et V ouverts de $\mathbb{R}^n$ tels que $x \in U, y \in V, F \subset U \bigcup V, U \bigcap V \neq \emptyset$.*

Démonstration :
$\exists c > 0$ tel que $\forall x, y \in F, |f(x) - f(y)| \leq c|x - y|$
alors pour tout δ-recouvrement de F,$F \subset \bigcup_{i \in I} U_i$,on a f(F)$\subset \bigcup_{i \in I} f(U_i)$ avec $\forall i, diam(f(U_i)) \leq c \times diam(U_i) \leq c \times \delta$

$$\begin{aligned} \text{donc } \mathcal{H}^s_\delta(f(F)) &\leq \mathcal{H}^s_\delta(F) \\ \text{donc } \mathcal{H}^s(f(F)) &\leq \mathcal{H}^s(F) \end{aligned}$$

donc $dim_H(f(F)) \leq dim_H(F)$

Commentaires:
Dans le cas $p < 1$,F est dit totalement déconnecté (je ne me souviens plus de la traduction exacte).On dit qu' il y a percolation lorsque les deux bords du carrés (à droite et à gauche) sont joignables par un chemin continu dans F.

3.3 Existence de la percolation

Proposition 3 *Pour* $0.999 < p < 1$,*la probabilité qu' il y ait percolation ,notée* $per(p)$*(et considérée comme une fonction de* p*) est* > 0.

Démonstration :
On commence par définir certaines notions.

- I carré de E_k est dit plein s' il contient 8 ou 9 carrés de E_{k+1}
- I carré de E_k est dit 2 fois plein s' il contient 8 ou 9 carrés pleins de E_{k+1}
- et par induction : un carré de E_k est dit m fois plein s' il contient 8 ou 9 carrés $(m-1)$ fois pleins de E_{k+1}

Remarque : Si I_1 et I_2 sont deux carrés adjacents de E_k qui sont pleins alors on peut joindre les côtés opposés de I_1 et I_2 en passant par des carrés de E_{k+1}
(petit dessin)

De même,si E_0 est m fois plein alors deux cotés opposés de E_0 sont joignables par un chemin dans E_m.
I_0 est m fois plein si et seulement si l' une des éventualités suivante a lieu:

- E_1 contient 9 carrés $(m-1)$ fois pleins
- E_1 contient 9 carrés dont 8 sont $(m-1)$ fois pleins
- E_1 contient 8 carrés $(m-1)$ fois pleins

Soit $p_m = P(I_0 \text{ est } m \text{ fois plein})$,on a:

$$\begin{aligned} p_m &= p^9 p_{m-1}^8 + p^9 \times 9p_{m-1}^8(1-p_{m-1}) + 9p^8(1-p)p_{m-1}^8 \\ \text{(par auto-similarité)} & \\ p_m &= 9p^8 p_{m-1}^8 - 8p^9 p_{m-1}^9 \text{ (pour } m \geq 2) \end{aligned}$$

de plus : $p_1 = P^9 + 9p^8(1-p) = 9p^8 - 8p^9$.

Posons $f(t) = 9p^8t^8 - 8p^9t^9$.On a si $p_0 = p$:

$$\text{pour } m \geq 1, p_m = f(p_{m-1}).$$

Alors avec $p = 0.999$, on a $f(t) = 8.9282515 \times t^8 - 7.9282874 \times t^9$.A l' aide de la calculatrice,on trouve que $t_0 = 0.9999613$ est point fixe de f et $0 < f(t) - t_0 \leq 0.5 \times (t - t_0)$ si $t_0 < t \leq 1$.
(faire un dessin de la fonction)

Donc $p_m \to t_0$ quand $m \to +\infty$.

$$\begin{aligned} P(E_0 \text{ est } m \text{ fois plein } ,\forall m) &= \lim_{n \to = \infty} p_m \\ &= t_0 \text{ qui est } > 0 \end{aligned}$$

Et dans le cas E_0 est m fois plein pour tout m,on a $\forall m$ un chemin dans E_m joignant les côtés doits et gauches de I_0,donc on a un tel chemin dans $F = \bigcap_{k=0}^{+\infty} E_k$.
En effet,si on a un chemin dans E_m,comme E_0 est m fois plein,on a un chemin dans E_{m+1} qui passe par les mêmes carrés de E_m.
On peut donc construire une suite d' applications $(g_k)_{k\geq 0}$ avec

- $\forall k \geq 0, g_k : [0,1] \to I_0$, à valeurs dans des carrés de E_k
- $\forall k$ $g_k(0)$ sur le bord gauche,$g_k(1)$ sur le bord droit
- si l' image de g_k traverse N carrés de E_k alors $[0,1]$ est divisé en N subdivisions égales et dans chacune des ces subdivisions, l' image de g_k est dans un des carrés visités

- si $k \geq 1$, alors g_k visite les mêmes carrés de E_{k-1} que g_{k-1} et dans les mêmes subdivisions

Voici un dessin pour les cas $k = 1$ et $k = 2$:

On a alors une suite de fonctions $(g_n)_{n\geq 0}$ uniformément convergente,donc la limite est une fonction continue,qui est un chemin dans F du bord droit au bord gauche de I_0.
Donc pour $p = 0.999$ la probabilité de percolation est > 0.

Montrons que la probabilité de percolation est une fonction croissante de p:
F est entièrement déterminé par p et la valeur prise par la suite de variables aléatoires $(C_{k,i})_{k\geq 0, 1\leq i\leq 9}$.
Soient $p < p'$.Soit $\omega \in \Omega$ tel qu' il y ait percolation en ω pour la probabilité p,alors comme

$$E_k(p)(\omega) \subset E_k(p')(\omega), \forall k \geq 0$$

par construction , on a

$$F(p)(\omega) \subset F(p')(\omega)$$

(on a rappelé la dépendance en p) , donc il y a percolation en ω pour la valeur p'.
Donc $per(p) \leq per(p')_c$.

Donc pour $p > 0.999$ la probabilité de percolation est > 0.

3.4 Existence d' une probabilité critique

Théorème 3 *Il existe une probablité critique...*