# Hyperbolicité au sens de Kobayashi et de Brody dans les espaces projectifs complexes

X. Menguy et A. Troesch

24 mai 1996

**Résumé**

Nous commençons par un théorème dû à Montel sur les familles normales où l'usage de la métrique hyperbolique apparait naturellement. Nous définissons alors l'hyperbolicité au sens de kobayashi. Une des applications sera le théorème de Kwack dont le corollaire, plus connu est le grand théorème de Picard. Nous reprenons par l'hyperbolicité au sens de brody pour chercher par la suite une généralisation du petit théorème de picard en dimension n qui constituera le but final de l'exposé.

## 1 Théorème de Montel.

Il s'agit dans cette introduction de démontrer le théorème de Montel sur les familles normales de fonctions holomorphes à valeurs dans un ouvert de la sphère de Riemann privée de trois points. La sphère sera notée $\mathbb{C}_\infty$. Le disque unité de $\mathbb{C}$ sera noté D. On appelle fonction de Moebius une homographie de déterminant 1.

**Définition 1** *Soit $\mathcal{F}$ une famille de fonctions d'un ouvert $U$ d'un espace topologique $X$ sur un espace métrique $Y$. On dit que $\mathcal{F}$ est une famille normale si et seulement si pour toute suite $f_n$ de fonction de $\mathcal{F}$ il existe une sous-suite $f_{n_k}$ convergeant uniformément vers une fonction holomorphe $g$ sur tous les compacts de $U$.*

**Théorème 1** *Soit $\mathcal{F}$ la famille des fonctions holomorphes d'un ouvert $U$ de $\mathbb{C}_\infty$ dans $\Omega = \mathbb{C}_\infty - \{0, 1, \infty\}$. Alors cette famille est normale.*

*Résumé de la preuve (1)*

la distance sur la sphère entre deux points est définie par la longueur de l'arc de grand cercle passant par ces deux points. La normalité étant une notion locale on peut remplacer notre ouvert par le disque unité dans $\mathbb{C}$. Soit donc un compact K du disque unité.

L'idée de la preuve est de réinjecter l'ensemble des images $f_n(K)$ à extraction de sous-suite près dans le disque unité par $g^{-1}$ où g est une homographie non constante de $\mathbb{C}_\infty$ qui ne modifiera pas la normalité de la famille. On obtiendra alors une famille de fonctions $g^{-1}f_n$ de K dans un compact de D ce qui grâce au lemme de Schwartz-Pick et au théorème d'Ascoli nous assurera la normalité de $g^{-1}f_n$. Nous conclurons à celle de $f_n$ par le fait que g est lipschitzienne de D dans $\mathbb{C}_\infty$ pour la métrique sphérique habituelle.

Toute la difficulté réside donc dans l'existence de g et de l'extraction des $f_n$. Pour cela nous utilisons la *distance hyperbolique* $d_{D,hyp}$ sur D et fabriquons une distance sur $\Omega$, $d_\Omega$ qui aura trois propriétés importantes:

• Pour cette distance toutes les fonctions holomorphes de $D$ dans $\Omega$ seront 1-lipschitziennes. C'est la propriété de coercivité: Les fonctions holomorphes n'augmentent pas la distance hyperbolique.

• De plus les distances entre deux points quelconques de $\{0, 1, \infty\}$ seront infinies.

• De plus $d_\Omega$ définira la topologie de $\Omega$

Ainsi les images itérées de K, $f_n(K)$ sont des compacts de diamètres inférieurs à celui de K. On prend des voisinages de $\{0, 1, \infty\}$ notés $V_0, V_1, V_\infty$ tels que leurs distances mutuelles soient supérieures au diamètre de K. Ainsi les $f_n(K)$ éviteront à chaque fois au moins un des voisinages. On peut donc supposer par exemple qu'il existe $(n_k)$ telle que $\forall k\ f_{n_k}(K) \cap V_0 = \{\varnothing\}$.

Il suffit donc par la suite de prendre pour $g^{-1}$ une fonction de Moebius envoyant l'extérieur de $V_0$ dans D.

**Démonstration:**

**Utilisation de l'hyperbolicité:**

1. *Remarque : La preuve ci-dessous utilise une métrique appelée métrique hyperbolique. Nous verrons dans le II qu'elle coïncide dans ce cas précis avec celle de Kobayashi.*

On munit D de sa métrique hyperbolique c'est à dire du changement d'échelle infinitésimal $ds = \frac{|dz|}{1-|z|^2}$ ce qui donne pour distance sur D :

$$d_{D,hyp}(z_1, z_2) = \inf_{\gamma, \gamma(0)=z_1, \gamma(1)=z_2} \int_\gamma \frac{|dz|}{1-|z|^2}.$$

Les géodésiques obtenues sont les arcs de cercles orthogonaux aux bords de D et passant par $z_1$ et $z_2$.

Le lemme de Schwartz-Pick $\frac{f'(z)}{1-|f(z)|^2} \leq \frac{1}{1-|z|^2}$ nous dit que les fonctions holomorphes du disque dans lui-même sont 1-lipschitzienne et sont des $d_D$-isométries si et seulement si ce sont des automorphismes du disque. On définit aussi une distance hyperbolique $d_{H+,hyp}$ sur $H^+$ en transposant $ds$ sur $H^+$ par la transformation de Cayley : $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$

L'élément infinitésimal obtenu est

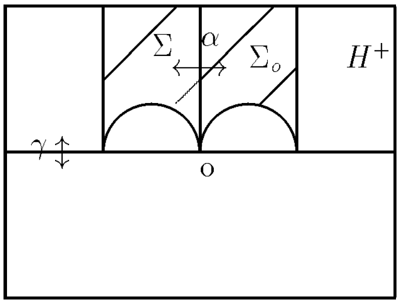
$$ds = \frac{|d(\frac{z-i}{z+i})|}{1-\frac{|z-i|^2}{|z+i|^2}} = \frac{2|dz|}{|z+i|^2-|z-i|^2} = \frac{|dz|}{y} \text{où on écrit } z = x+iy\ .$$

On va maintenant transposer cette distance sur $\Omega$. Pour cela on construit un revêtement de $\Omega$ à partir de $H^+$.

**Construction du revêtement universel de $\Omega$:**

On considère $\Sigma$ la partie hachurée suivante de $H^+$ et $\Sigma_0$ la demi-partie droite de $\Sigma$. On note aussi

$$\Gamma = \{z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}, ad-bc = 1\}\ et\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} [2]$$




Soit $u$ et $v$ deux éléments particuliers de $\Gamma$: $u(z) = z+2$ et $v(z) = \frac{z}{2z+1}$.

**Théorème 2** *$\Gamma$ est engendré par $u$ et $v$. Les $\Gamma$-images de $\Sigma \cup \partial\Sigma_0$ recouvrent $H^+$.*

Nous pouvons maintenant expliciter notre revêtement de $\Omega$.

**Théorème 3** *Il existe un revêtement holomorphe $\lambda : H^+ \to \Omega$ tel que:*
- *Pour tout $z \in H^+$, $\lambda'(z) \neq 0$.*
- *$\lambda(z) = \lambda(w)$ si et seulement si $w$=$h(z)$ pour $h \in \Gamma$.*

**Définition de la distance hyperbolique sur $\Omega$**

On définit tout d'abord la longueur d'une courbe $\gamma$ dans $\Omega$. Soit donc $\gamma$ une courbe et $\gamma_1$ un relèvement dans $H^+$ par $\lambda$. La longueur de $\gamma_1$ est définie comme étant l'intégrale sur son chemin de $ds = \frac{|dz|}{y}$ qui est le changement d'echelle infinitésimal entre la métrique euclidienne et la métrique hyperbolique sur $H^+$.

En remarquant que $u$ et $v$ sont des $d_{H+,hyp}$-isométries on voit que cette longueur ne dépend pas du relèvement choisi et du sens de parcours.

On pose donc:

$$\text{long}(\gamma) = \text{long}(\gamma_1)$$

En posant

$$d(z_1, z_2) = \inf_{\gamma, \gamma(0)=z_1, \gamma(1)=z_2} \text{long}(\gamma),$$

on définit bien une distance sur $\Omega$ appelée distance hyperbolique et notée $d_\Omega$.

De plus cette distance conserve bien la topologie de $\Omega$.

Nous terminons par un théorème qui regroupe les travaux précédents.

**Théorème 4** *Soit $f$ une fonction holomorphe : Alors*

$$\forall\ (z, z') \in D\ d_\Omega(f(z), f(z')) \leq d_{D,hyp}(z, z').$$

Cette propriété provient du fait que $\lambda$ préserve la longueur des courbes et du fait que les fonctiond holomorphes de $D \to D$ sont 1-lipschitziennes pour la distance hyperbolique.

En fait pour terminer la démonstration du théorème de Montel il faut montrer que la distance limite entre deux points quelconques de $\{0, 1, \infty\}$ est infinie. Comme ces points sont interchangeables par fonctions de Moebius il suffit de calculer la distance entre, par exemple, 0 et $\infty$ soit :

$$d_{H+,hyp}(0, \infty) = d_{D,hyp}(-i, i) = \int_{-1}^{1} \frac{dy}{1 - y^2} = \infty.$$

# 2 Hyperbolicité au sens de Kobayashi.

On cherche dans cette partie à généraliser le théorème de Montel pour des espaces un peu plus compliqués (on s'interessera au cas des variétés complexes). Pour ce faire, la notion d'hyperbolicité sur le disque unité $D$ ne suffit plus, et il faut introduire une nouvelle notion d'hyperbolicité

## 2.1 La semi-distance de Kobayashi.

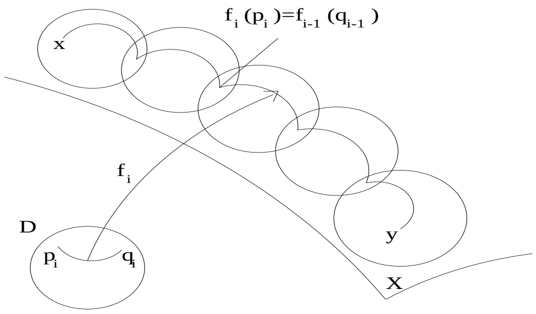
On note $D$ le disque unité, que l'on suppose muni de la norme hyperbolique. On rappelle (cf. introduction) que les fonctions holomorphes de $D$ dans $D$ sont 1-lipschitziennes et qu'un automorphisme est une isométrie.

On cherche à généraliser la notion d'hyperbolicité à une variété complexe $X$. Pour ce faire, on a besoin de quelques définitions.

**Définition 2** *Une chaîne de disques de Kobayashi de $x$ à $y$ dans $X$ (supposé connexe) est un triplet* $((f_i)_{i \in I}, (p_i)_{i \in I}, (q_i)_{i \in I})$ *de trois familles finies ($I = \{1, .., m\}$) telles que*

1. *pour $i = 1, .., m$, $f_i : D \to X$ est holomorphe,*
2. *$p_i$ et $q_i$ sont des points de $D$ tels que :*

$$\begin{cases} f_1(p_1) = x \\ f_m(q_m) = y \\ f_i(q_i) = f_{i+1}(p_{i+1}) \end{cases}$$




**Définition 3** *On définit la semi-distance de Kobayashi par :*

$$d_{Kob,X}(x, y) = d_X(x, y) = \inf_{((f_i)(q_i)(p_i))} \sum_{i=1}^{m} d_{hyp}(p_i, q_i).$$

Elle vérifie l'inégalité triangulaire et est clairement symétrique.

On appelle somme (ou longueur) de Kobayashi une somme $\sum d_{hyp}(p_i, q_i)$ et chemin de Kobayashi le chemin obtenu en prenant les images des géodésiques de $p_i$ à $q_i$.

**Proposition 1** *Si $X$ est connexe, il existe une chaîne de disques joignant $x$ à $y$ dans $X$. Ainsi $d_X(x, y)$ est finie.*

**Exemple important.**

Si $X = D$ alors $d_D$ coincide avec la distance hyperbolique classique, puis par transfert sur $\Omega = \mathbb{C}_\infty - \{0, 1, \infty\}$ on remarque que $d_\Omega$ est la distance hyperbolique introduite dans l'introduction.

**Proposition 2** *Les fonctions holomorphes $f : X \to Y$ sont 1-lipschitziennes pour les semi-distances de Kobayashi, autrement dit :*

$$\forall x, x' \in X, d_Y(f(x), f(x')) \leq d_X(x, x').$$

En effet, il suffit de considérer $f$ comme le seul maillon d'une chaîne de Kobayashi joignant $f(x)$ et $f(y)$.

En particulier en considérant une inclusion $i : X \hookrightarrow Y$ on obtient le résultat suivant :

**Proposition 3** *Si $X \subset Y$, alors $d_Y \leq d_X$.*

**Proposition 4** *La semi-distance de Kobayashi est continue.*

### 2.2 Hyperbolicité au sens de Kobayashi.

**Définition 4** *On dit que $X$ est hyperbolique au sens de Kobayashi (on dira simplement «hyperbolique») si la semi-distance $d_X$ est en fait une distance, donc si $x \neq y \Rightarrow d_X(x, y) > 0$.*

**Définition 5** *On dit que $X$ est hyperbolique au sens de Kobayashi modulo $S$ si deux points distincts non tous deux contenus dans $S$ vérifient $d_X(x, y) > 0$.*

**Proposition 5** *Si $X$ est une sous-variété de $Y$ (ou plus généralement, s'il existe une fonction holomorphe injective $f : X \to Y$), alors si $Y$ est hyperbolique, $X$ l'est aussi.*

En effet, $d_X(x, y) \geq d_Y(f(x), f(y)) > 0$.

Par exemple, un sous-ensemble ouvert borné de $\mathbb{C}$ est hyperbolique.

**Théorème 5** *(Barth).Soit $X$ une variété complexe hyperbolique. Alors $d_X$ définit la topologie de $X$.*

## 3 Plongement hyperbolique

**Définition 6** *Soit $X \subset Y$ deux variétés. On dit que $X$ est un plongement hyperbolique dans $Y$ si une des trois propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :*

1. *$X$ est hyperbolique. Soit $(x_n)$,$(y_n)$ deux suites convergeant vers $x$ et $y$ dans $\overline{X} - X$. Si*
$$\lim_{n \to \infty} d_X(x_n, y_n) = 0 \text{ alors } x = y.$$

2. *Soit $\{x_n\}, \{y_n\}$ deux suites convergeant vers $x$ et $y$ dans $\overline{X}$. Si*
$$\lim_{n \to \infty} d_X(x_n, y_n) = 0 \text{ alors } x = y.$$

3. *Soient $x$ et $y$ $(x \neq y)$. Alors il existe un voisinage $U$ de $x$ et un voisinage $V$ de $y$ dans $\overline{X}$ tels que:*
$$d_X(U \cap X, V \cap X) > 0.$$

**Définition 7** *Si on suppose dans la définition précédente qu'au moins une des deux suites évite à partir d'un certain rang un fermé $S$ on obtient la définition de plongement hyperbolique modulo $S$.*

**Théorème 6** *Soit $X$ une sous-variété complexe relativement compacte dans $Y$. Alors $X$ est hyperboliquement plongée dans $Y$ si et seulement si Hol(D,X) est relativement localement compact dans Hol(D, Y).*

**Exemple important:**

$\Omega$ est hyperbolique comme on l'a vu dans la section précédente. De plus on a vu que pour une distance $d$ donnée on pouvait trouver trois voisinages respectifs de 0,1 et $\infty$ tels que leurs distances mutuelles soient supérieures à $d$. $\Omega$ vérifie donc la condition de plongement hyperbolique dans la sphère de Riemann.

On retrouve d'ailleurs le théorème de Montel dans le théorème 8 en posant $X = \Omega$ et $Y = \mathbb{C}_\infty$.

Une des premières application du plongement hyperbolique est le grand théorème de Picard. Nous ennonçons une généralisation sous la forme du théorème de Kwack.

**Théorème 7** *(Théorème de Kwack sur D) $D^*$ est le disque privé de 0. Soit $f : D^* \to X$ holomorphe. On définit:*

*KW 1* *$X$ est hyperboliquement plongée dans $Y$ et il existe $z_k$ dans $D^*$ tel que $z_k \to 0$ et $f(z_k)$ converge vers un point $y \in \overline{X}$.*

*KW 2* *$f$ a une fausse singularité en 0.*

*Alors:*

$$KW1 \Longrightarrow KW2.$$

*En particulier si X est hyperboliquement plongée dans Y, et $\overline{X}$ est compact, alors toute fonction holomorphe $f : D^* \mapsto X$ s'étend en une fonction holomorphe de D dans Y.*

L'idée de base de la démonstration est simple. On part d'une hypothèse très forte celle du plongement hyperbolique. On dispose donc d'une distance $d_X$ qui n'admet pas de dégénérescence à la frontière de X et qui rend notre fonction 1-lipschitzienne. En utilisant cette propriété on transporte par f les points proches de $z_k$(par exemple un voisinage de 0 puisque $z_k$ converge vers 0) pour $d_D$ en des points proches de $f(z_k)$ pour $d_X$. La non dégénérescence de $d_X$ nous assurera que ces points sont aussi proches de y pour montrer enfin que f admet y comme limite en 0 et donc une fausse singularité.

**corollaire 1** *(Grand Théorème de Picard) Soit f une fonction holomorphe de $D^*$ dans $\mathbb{C}$ ayant une singularité essentielle en 0 alors f évite au plus une valeur.*

**Démonstration:** Supposons que $f$ évite 2 valeurs $b$ et $d$, et possède une singularité en $a$. On se ramène en utilisant une fonction de Moebius au cas de $f : D^* \to \Omega$. La preuve découle donc du fait que $\Omega$ est un plongement hyperbolique dans $\mathbb{C}_\infty$ et du théorème de Kwack.

# 4 Hyperbolicité au sens de Brody.

**Définition 8** *Soit X une variété complexe. On dit que X est hyperbolique au sens de Brody si toute fonction holomorphe $f : \mathbb{C} \to X$ est constante.*

*On dit aussi que X est hyperbolique au sens de Brody modulo V si et seulement si l'image de toute fonction holomorphe f de D dans X est contenue dans V.*

**Théorème 8** *(Brody) Soit X une variété complexe compacte. X est hyperbolique au sens de Brody si et seulement si elle l'est au sens de Kobayashi.*

En fait l'implication Kobayashi $\Longrightarrow$ Brody est toujours vraie et se voit directement: Supposons f holomorphe non constante de $\mathbb{C}$ dans X hyperbolique. Soit donc $x$ et $y$ tels que $f(x) \neq f(y)$. On a $d_X(f(x), f(y)) \leq d_{\mathbb{C}}(x, y) = 0$ car la distance de Kobayashi est nulle sur $\mathbb{C}$.

On remarque donc que pour $X = \Omega$ cela nous donne le petit théorème de Picard ce qui pouvait déjà être fait à la fin de la première partie.

On cherche à généraliser le petit théorème de Picard en dimension n. On l'obtient sous la forme suivante:

**Théorème 9** *Soit V le complémentaire dans $\mathbb{P}^n$ de $2n+1$ hyperplans en position générale(n hyperplans quelconques de cet ensemble sont linéairement indépendants). Alors V est hyperbolique au sens de Brody.*

On est donc amené à étudier les fonctions holomorphes f à valeur dans $\mathbb{P}^n$ évitant $2n+1$ hyperplans en position générale. Si on note $H_i$ ces formes linéaires les $H_i(f)$ seront des fonctions holomorphes sans zéro. En prenant $n+1$ $H_i$ on peut construire une relation linéaire $\sum_{i=1} n + 1 \lambda_i H_i(f) = 0$.

Il parait donc naturel d'étudier les solutions de l'équation $\sum i = 1n + 1h_i = 0$ où les $h_i$ sont des unités c'est à dire des fonctions holomorphes sans zéro. Ce point sera traité dans le théorème de Borel.

La somme précédente peut se mettre sous la forme d'une somme d'exponentielles de fonctions entières que l'on regroupe selon leur comportement à l'infini. On veut montrer que dans chaque classe de comportement à l'infini la somme des fonctions est nulle. Pour ce faire nous avons besoin des résultats de la théorie de Nevanlinna sur l'accroissement des fonctions holomorphes à l'infini.

# 5 Théorie de Nevanlinna.

On a besoin pour la suite de fonctions mesurant l'accroissement d'une fonction holomorphe au niveau de ses pôles et de l'infini. On admet donc l'existence de fonctions $N_f(R)$, $m_f(R)$ et $T_f(R)$ vérifiant plusieurs propriétés:

$T_f$ est appelée fonction de poids et $m_f$ fonction de proximité.

Leurs formules explicites sont données à la fin des propriétés et le lecteur pourra donc oublier les formes explicites pour ne garder que les propriétés essentielles.

**Propriété 1:** $T_f(R) = N_f(R) + m_f(R)$
et $T_f(R) = m_f(R)$ si f n'a pas de pôle.
**Propriété 2 (Formule de Poisson-Jensen):** $T_{\frac{1}{f}} = T_f + O(1)$.
**Propriété 3 (multiplication et addition):** Ecrivons $h_f$ à la place de $T_f$,$m_f$ et $N_f$. Alors on a:

- $h_{fg} \leq h_f + h_g$.
- $h_{f_1+\cdots+f_n} \leq h_{f_1} + \cdots + h_{f_n} + h_{f_n} + \log n$.
- $N_{f_1+\cdots+f_n} \leq N_{f_1} + \cdots + N_{f_n}$.

**Propriété 4:** Soit $f$ méromorphe sur $\mathbb{C}$. Si $T_f(R)$ est borné alors $f$ est constante. $f$ est une fraction rationnelle si et seulement s' il existe des $R_j$ tendant vers l'infini et $M$ tels que:

$$T_j(R_j) \leq M \log R_j$$

**Propriété 5 (Théorème de la dérivée logarithmique)** On dit que $f = O_{exc}(g)$ si il existe M tel que $f \leq M.g$ sur le complémentaire d'un ensemble de mesure de Lebesgue fini. Soit $f$ méromorphe sur $\mathbb{C}$ et non constante. Alors on a:

$$m_{\frac{f'}{f}}(r) = O_{exc}(\log r + \log T_f(r) + \log^+ |\frac{1}{c_f}|)$$

Si $f$ est méromorphe et est en $O(r^k)$ alors :

$$m_{\frac{f'}{f}}(r) = O(\log r)$$

$T_f$ est appelée fonction de poids et $m_f$ fonction de proximité.
Les formes explicites sont les suivantes:

**Définition 9** *On note $n_f(R,0)$ et $n_f(R,\infty)$ le nombre de zéros et de pôles de $f$ dans $\overline{D_R}$. On définit alors:*

$$N_f(R,0) = \sum_{a\in D_R, a\neq 0, f(a)=0} (ord_a f) \log |\frac{R}{a}| + n_f(0,0)\log R$$

$$N_f(R,\infty) = N_f(R) = \sum_{a\in D_R, a\neq 0, f(a)=\infty} -(ord_a f) \log |\frac{R}{a}| + n_f(0,\infty)\log R.$$

**Définition 10** *On note :*

$$m_f(R,\infty) = \int_0^{2\pi} \log^+ |f(Re^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi}$$
$$T_f(R,\infty) = T_f(R) = m_f(R,\infty) + N_f(R,\infty).$$

# 6 Courbes holomorphes dans $\mathbb{P}^n$.

Le but de cette partie est d'étudier certaines propriétés de fonctions holomorphes à valeurs dans $\mathbb{P}^n$, et évitant un certain nombre d'hyperplans en «position générale». On pourra en déduire en passant une nouvelle preuve, du petit théorème de Picard, due à Borel.

## 6.1 Théorème de Borel.

Pour ces différentes études, nous avons besoin d'un théorème important, qui donne la structure des solutions de l'équation $h_0 + ... + h_{n+1} = 0$, où les $h_i$ sont des unités dans l'anneau des fonctions entières, c'est à dire des fonctions entières qui ne s'annulent pas.

**Théorème 10** *(Borel). Soit $h_0, ..., h_n$ des unités telles que $h_0 + ... + h_n = 0$. On définit la relation d'équivalence suivante :*

$$i \sim j \iff \exists C \neq 0 \quad tq \quad h_i = Ch_j.$$

*Soit alors $\{S\}$ la partition de $\{1, ..., n\}$ en les classes d'équivalence. Alors :*

$$\forall S \in \{S\}, \qquad \sum_{i\in S} h_i = 0.$$

*De plus, si $n \geq 2$, alors il n'y a qu'une seule classe d'équivalence.*

Pour mener à bien la démonstration de ce théorème, on a besoin de quelques résultats techniques préliminaires.

**Proposition 6** *Soit $h$ une unité non constante. Alors* $T_{\frac{h'}{h}}(r) = o_{exc}(T_h(r))$.

Pour démontrer cette proposition, on se rappelle qu'une fonction bornée par $M \log r$ en $+\infty$ est une fraction rationnelle (donc constante s'il s'agit d'une unité), pour conclure que $T_h$ croît plus vite que $\log r$. En injectant dans le théorème de la dérivée logarithmique, on obtient le résultat voulu.

**Proposition 7** *Soit $g$ méromorphe sur $\mathbb{C}$ et $g \neq 0$. Alors* $T_{g'} = O_{exc}(T_g)$.

**Démonstration (Borel).**

En divisant l'équation $h_0 + \cdots + h_n = 0$ par $-h_0$, on se ramène à l'équation $h_1 + \cdots + h_n = 1$.

Supposons qu'on ait montré qu'il existe forcément $i \neq j$ tels que $h_i = Ch_j$. Considérons alors $\{S\}$ la partition de $\{1, \ldots, n\}$ en les classes d'équivalence, en notant de manière privilégiée $S_1$ pour la classe d'équivalence des fonctions constantes. Alors pour une classe d'équivalence S, notons

$$h_S = \sum_{i \in S} h_i \qquad \text{Ainsi :} \qquad \sum_{S \ tq \ h_S \neq 0} h_S = 1$$

et $h_s$ sont des unités.

Ainsi, s'il existe $S \neq S_1$ tel que $h_S \neq 0$, alors forcément : $\exists S, S', \quad \exists C, \quad h_S = Ch_{S'}$ ce qui est absurde d'après la définition de la relation d'équivalence. Ceci montre le théorème.

Montrons le point admis.

Soit des fonctions $f_i$ telles que $\forall i, f_i \neq 0$ et $f_1 + \cdots + f_n = 1$. En dérivant, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} f_1 + \cdots + f_n = 1 \\ (\frac{f_1'}{f_1})f_1 + \cdots + (\frac{f_n'}{f_n})f_n = 0 \\ \vdots \\ (\frac{f_1^{(n-1)}}{f_1})f_1 + \cdots + (\frac{f_n^{(n-1)}}{f_n})f_n = 0 \end{cases}$$

Ceci incite à poser :

$$L(f) = \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \frac{f_1'}{f_1} & \ldots & \frac{f_n'}{f_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{f_1^{(n-1)}}{f_1} & \ldots & \frac{f_n^{(n-1)}}{f_n} \end{vmatrix} \quad et \quad L_i(f) = \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 & \ldots & 1 \\ \frac{f_1'}{f_1} & \ldots & 0 & \ldots & \frac{f_n'}{f_n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{f_1^{(n-1)}}{f_1} & \ldots & 0 & \ldots & \frac{f_n^{(n-1)}}{f_n} \end{vmatrix}$$

où la colonne supprimée est la $i^e$ colonne.

Alors, $f_1, \ldots, f_n$ sont linéairement indépendants si et seulement si $L(f) \neq 0$. On a alors (formules de Cramer):

$$f_i = \frac{L_i(f)}{L(f)}$$

**Lemme 1** *Soit $f_1 \ldots f_n$ des fonctions méromorphes. Notons $L = L(f)$, $L_i = L_i(f)$ et $T = T_{f_1} + \cdots + T_{f_n}$. Alors :*

$$m_L(r) \ \& \ m_{L_i}(r) = O_{exc}(\log r + \log^+ T(r)).$$

On avait vu au cours de la démonstration de la proposition 6 que si $h_i$ est non constante, alors $\log r = o_{exc}(T_{h_i}(r))$.

Si $h_i$ est constante pour tout $i$, le problème est résolu. Sinon, soit $i$ tel que $h_i$ soit non constante. Montrons que les $h_i$ ne sont pas linéairement indépendants. Si les $h_i$ sont linéairement indépendants, alors d'après les formules de Cramer, $h_i = \frac{L_i}{L}$. Ainsi $m_{h_i} \leq m_{L_i} + m_{\frac{1}{L}}$. Alors, en utilisant le lemme 2, et le fait que $\log(r) = o(T(r))$, on obtient la contradiction $T = o(T)$.

Par une récurrence facile, on montre alors que si $h_1, \ldots, h_n$ sont des unités vérifiant $h_1 + \cdots + h_n = 1$, alors il existe $C \neq 0$ et $i \neq j$ tels que $\frac{h_i}{h_j} = C$.

Ceci achève de démontrer le théorème.

## 6.2 Courbes holomorphes évitant des hyperplans.

Maintenant que nous avons le théorème de Borel, nous avons les outils nécessaires pour démontrer divers jolis résultats à caractère géométrique sur des courbes holomorphes à valeurs dans $\mathbb{P}^n$ évitant un certain nombre d'hyperplans.

Soit $f$ holomorphe de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{P}^n$ alors on peut écrire $f$ sous la forme $(g_0, ..., g_n)$ avec les $g_i$ holomorphes et sans zéro commun.

**Définition 11** *On dit que $1+m$ hyperplans $(H_k)_{k=0,\dots,m}$ de $\mathbb{P}^n$ sont en position générale si $m \geq n$ et $(n+1)$ quelconques de ces hyperplans sont toujours linéairement indépendants.*

On peut considérer le cas particulier où $m = n+1$ : on a alors $n+2$ hyperplans. $H_0, \dots, H_n$ étant linéairement indépendants, on peut choisir un système de coordonnées, tel que pour $i \leq n$, les $H_i$ soient définis par $H_i = \{x, x_i = 0\}$. Alors $H_{n+1}$ est défini par $\lambda_0 x_0 + \ldots + \lambda_n x_n = 0$, et donc, quitte à faire une dilatation sur les coordonnées, les $H_i$ sont définis respectivement par les équations :

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ \vdots \\ x_n = 0 \\ x_0 + \cdots + x_n = 0 \end{cases}$$

C'est ce qu'on appelle la forme standard.

**Définition 12** *Soit $2 \leq q \leq n$ et $J = \{j_1, \dots, j_q\} \subset \{1, \dots, n\}$. La diagonale $D_J$ est l'ensemble défini par l'équation $x_{j_1} + \cdots + x_{j_q} = 0$.*

**Théorème 11** *(Bloch-Cartan). Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{P}^n$ une fonction holomorphe non constante, avec $n \geq 2$. Soit $H_0, \dots, H_{n+1}$ $n+2$ hyperplans en position générale. Alors :*

$$f(\mathbb{C}) \subset (\bigcup_{i=0}^{n+1} H_i)^C \quad \Longrightarrow \quad \exists J,\ f(\mathbb{C}) \subset D_J.$$

**Démonstration**

On écrit les hyperplans sous forme standard, et on note $f = (f_0, \dots, f_n)$ où les $f_i$ sont entières, sans zéro commun. Par hypothèse, on a alors :

$$\forall z, \qquad \begin{cases} f_0(z) \neq 0 \\ \vdots \\ f_n(z) \neq 0 \\ f_0(z) + \cdots + f_n(z) \neq 0 \end{cases}$$

On applique alors Borel en posant

$$h_i = \frac{f_i}{f_0 + \cdots + f_n}$$

et en regardant une classe S où les $h_i$ sont non constants.

Le théorème de Borel permet aussi de montrer très facilement le petit théorème de Picard :

**Théorème 12** *(Petit Théorème de Picard).*
*Si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{P}^1 - \{3 \text{ points}\}$, alors $f$ est constante.*

**Démonstration.**

En fait, le théorème de Picard est le cas $n = 1$ du théorème 11, cas qu'on avait exclu. En effet, pour $n = 1$, on considère $n+2 = 3$ hyperplans de $\mathbb{P}^1$, qui sont simplement des points. On fait donc la même chose que précédemment mais cette fois-ci il ne reste que la classe des $h_i$ constants ce qui donne f constante.

On peut aussi énoncer le théorème de Bloch-Cartan en terme d'hyperbolicité au sens de Brody :

**Théorème 13** *Soit $(H_i)_{i=0,\dots,n+1}$ $n+2$ hyperplans en position générale.On note :*

$$X = (\bigcup_{i=0}^{n+1} H_i)^C \qquad et \qquad Y = \bigcup_J D_J$$

*Alors $X$ est hyperbolique modulo $Y$ au sens de Brody, pour $n \geq 2$.*

On va maintenant démontrer un autre théorème dans le même style.

**Théorème 14** *(Fujimoto-Green). Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{P}^n$ holomorphe dont l'image est contenue dans le complémentaire de $n+p$ hyperplans en position générale ($p \geq 2$), alors l'image est contenue dans un sous-espace linéaire projectif de dimension inférieure à $E(\frac{n}{p})$.*

En effet, si on note $H_i(x)$ les formes linéaires définissant les hyperplans et si on pose $h_i = H_i(f)$, alors les $h_i$ sont des unités. Pour tout ensemble $S$ de la partition de $\{1,..,n+p\}$, on a $\#(S^C) \leq n$, sinon, en construisant $J$ avec $n+1$ éléments de $S^C$ et un élément $i_0$ de S, on obtient :

$$\sum_{j \in J} a_j H_j = 0 \qquad \textit{donc} \quad \textit{aussi} \qquad \sum_{j \in J} a_j h_j = 0 \quad \textit{avec} \quad a_j \neq 0 \ \forall j,$$

ce qui contredit Borel en considérant la classe de $i_0$. Par conséquent, $S$ a au moins $p$ éléments. Il en résulte que :

$$q \leq \frac{n+p}{p}$$

où q est le nombre de classes S ce qui permet de conclure.

En corollaire du théorème de Fujimoto-Green nous avons donc la généralisation du petit théorème de Picard ennoncée précédemment:

**Théorème 15** *Soit $V$ le complémentaire dans $\mathbb{P}^n$ de $2n+1$ hyperplans en position générale. Alors $V$ est hyperbolique au sens de Brody. Ainsi toute fonction holomorphe évitant $2n+1$ hyperplans dans $\mathbb{P}^n$ est constante.*

# Références


[1] Introduction to Complex Hyperbolic Spaces, Springer-verlag.

[2] Iteration of rational functions, Springer-Verlag.

[3] Hyperbolic Manifolds and Holomorphic Mappings, Dekker.