Enumération des polyominos parallèlogrammes

Jean-Christophe Aval et Emeric Gioan

22 mai 1996

1 Introduction

Le but de ce travail est l'énumération d'une certaine classe de polyominos, appelés polyominos parallèlogrammes. La méthode repose sur une bijection entre les polyominos parallèlogrammes et les demi-pyramides qui sont des empilements de segments particuliers. De cette bijection et de théorèmes d'inversion, nous déduisons la série génératrice des polyominos parallèlogrammes.

Les polyominos sont connus et étudiés depuis longtemps. Cependant, la plupart des résultats connus actuellement datent des vingt dernières années; nous nous appuyons en particulier sur la thèse de Mireille Bousquet-Mélou soutenue en Mai 1991. Les notations lui sont en général empruntées.

Ces études trouvent des applications en physique statistique, notamment pour décrire des transitions de phase.

2 Définitions

2.1 Polyominos parallèlogrammes

Considérons le plan $R * R$. Une cellule élémentaire est un carré $[i, i+1] * [j, j+1]$, où i et j sont des entiers.

Définition

Un *polyomino* est une union finie de cellules élémentaires d'intérieur connexe et définie à translation près.

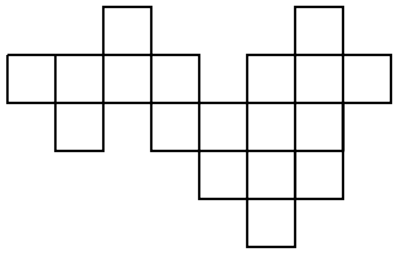

FIG. 1 - *Un polyomino*

Définition

Un *polyomino parallèlogramme* est un polyomino dont la frontière est la réunion de deux chemins non vides ne faisant que des pas Nord et Est, et n'ayant pour tous points d'intersection que leurs extrémités.

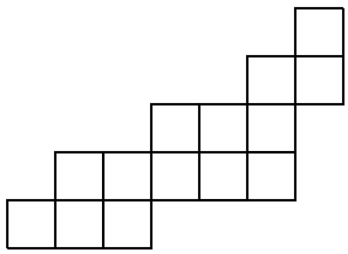

FIG. 2 - *Un polyomino parallèllogramme*

Définition

On définit de manière naturelle la hauteur, la largeur, le périmètre, et l'aire d'un polyomino.

Notons que, pour un polyomino parallèlogramme, la donnée de sa hauteur et de sa largeur fournit le périmètre.

2.2 Empilement de segments

On s'intéresse ici à l'ensemble P des segments de la forme $P = [a, b] * \{n\}$, où a,b,n sont des entiers, $a \leq b$; $[a, b]$ est le support de P, n son niveau.

Deux éléments P et P' sont dits en concurrence si l'intersection de leurs supports est non vide; on note P T P'.

Définition

Un *empilement de segments* est un sous-ensemble fini E de P tel que:

- deux éléments distincts de E en concurrence ne sont jamais au même niveau.
- pour tout P de E de niveau non nul, il existe un élément de niveau $n-1$ en concurrence avec P.

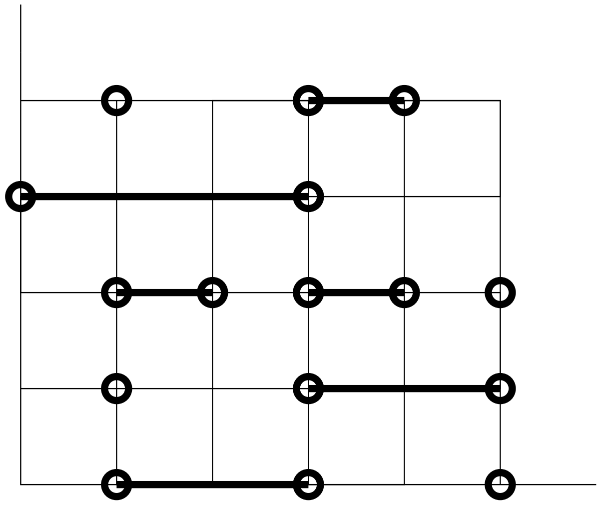

FIG. 3 - *Un empilement de segments*

Définition

Une pièce est dite *maximale* (resp. *minimale*) si aucune pièce de niveau supérieur (resp. inférieur) n'est en concurrence avec elle. Un empilement est dit *trivial* s'il est soit vide soit composé de pièces de niveau zéro.

Définition

Soit E et F deux empilements de segments. On veut définir la *superposition* de E et F. Elle consiste, intuitivement, à translater verticalement toutes les pièces de F d'une même hauteur supérieure au niveau maximum des pièces de E, puis à "laisser tomber" ces pièces sur celles de E.

L'existence et l'unicité d'un tel empilement se démontre par récurrence sur le niveau des pièces de F.

Le résultat de cette opération est noté $E \sqcup F$.

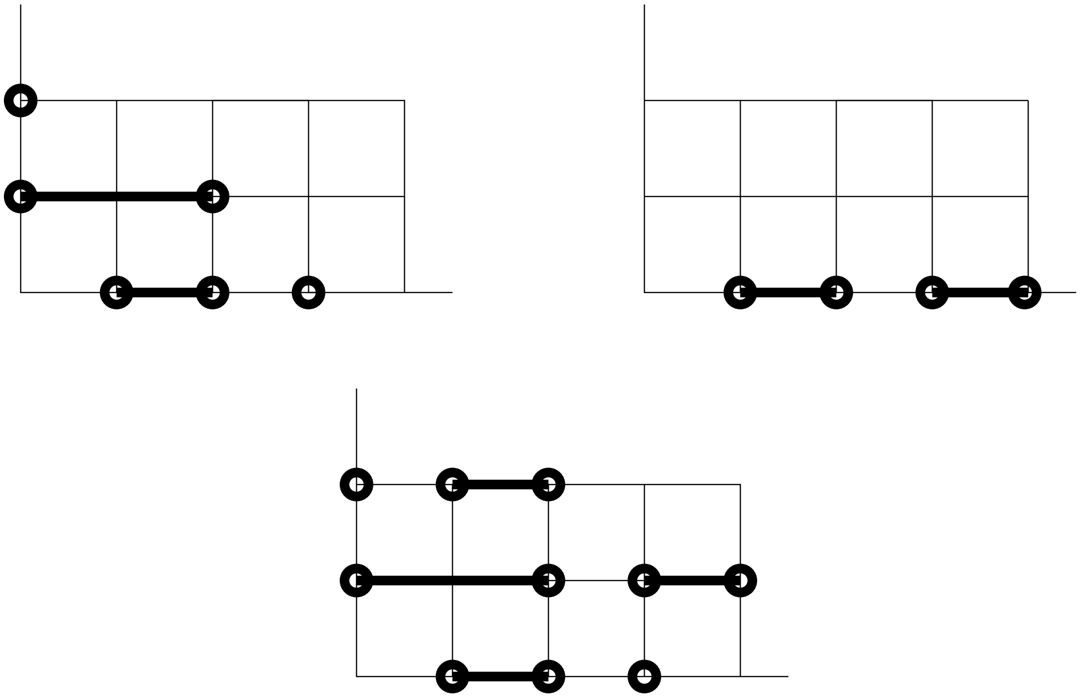

FIG. 4 - *Superposition de deux empilements*

3 Théorèmes d'inversion

Ces théorèmes permettent d'énumérer certaines familles d'empilements relativement à une valuation donnée. Soit K un corps commutatif , $x_1, ..., x_n$ des indéterminées. On appellera valuation toute application

$$\nu : S \rightarrow K[x_1, ..., x_n]$$

où S est l'ensemble des segments $[a, b]$, $a \leq b$, et vérifiant les conditions suivantes:

- pour tout s de S, $\nu(s)$ est un polynôme en $x_1, ..., x_n$ sans coefficient constant;
- pour tout monôme $x_1^{\alpha_1} ... x_n^{\alpha_n}$, le nombre de segments dont la valuation a une composante non nulle relativement à ce monôme est fini.

La valuation d'une pièce est alors celle de son support, la valuation d'un empilement est le produit des valuations de ses pièces.

Théorèmes d'inversion

1. La série génératrice des empilements de segments valués est:

$$\sum_{E\in\Pi}\nu(e)=\frac{1}{\sum_{F\in\Theta}(-1)^{|F|}\nu(F)}$$

où Π est l'ensemble de tous les empilements, Θ est l'ensemble des empilements triviaux, et $|F|$ désigne le nombre de pièces de F (la série au dénominateur s'appelle série génératrice alternée des empilements triviaux valués).

2. Soit Λ un sous-ensemble de S. La série génératrice des empilements ayant toutes leurs pièces maximales dans Λ est:

$$\sum_{E,max(E)\subset\Lambda}\nu(E)=\frac{\sum_{F\in\Theta(\Lambda^c)}(-1)^{|F|}\nu(F)}{\sum_{F\in\Theta}(-1)^{|F|}\nu(F)}$$

où $\Theta(\Lambda^c)$ est l'ensemble des empilements triviaux à pièces dans le complémentaire de Λ.

Démonstration

Il est évident que 2. implique 1.; montrons donc 2..

On regroupe les couples E, F tels que $E' = F \sqcup E$, avec F trivial et E à pièces maximales dans Λ, que l'on note $E' \leftarrow (E, F)$.

$$(\sum_E\nu(E))(\sum_F(-1)^{|F|}\nu(F))=\sum_{E'}(\nu(E')\sum_{(E,F)}(-1)^{|F|})$$

$$E'\leftarrow(E,F)\Rightarrow\begin{cases}F\subset min(E'),\\ F\supset F_0=min(E')\cap max(E')\cap\Lambda^c.\end{cases}$$

Inversement, soit F_1 vérifiant les deux conditions ci-dessus, l'unique E_1 tel que $E' = F_1 \sqcup E_1$ doit vérifier $max(E_1) \subset \Lambda$. Or:

$$\sum_{F_0\subset F_1\subset min(E')}(-1)^{|F_1|}=0$$

sauf si $F_0 = min(E')$, ie E' est un empilement trivial à pièces dans Λ^c.

Cqfd.

4 Partitions

Soit L un ensemble dont les éléments peuvent être classés selon un paramètre (de taille). La série génératrice des objets de L est: $\sum a_n t^n$ où a_n est le nombre d'objets de taille n.

Définition

Soit n un entier positif. On appelle *partition de n à p parts* toute suite $1 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_p$ telle que $\lambda_1 + ... + \lambda_p = n$.

Proposition

La série génératrice des partitions dont toutes les parts sont inférieures ou égales à n, comptées suivant le nombre de parts (par y) et le nombre qu'elles partitionnent (par q) est

$$F_n(q,y) = \frac{1}{(yq)_n}$$

où

$$(a)_n = \prod_{i=0}^{n-1}(1 - aq^i)$$

Démonstration

$$F_n(q,y) = F_{n-1}(q,y)\sum_{k=0}^{\infty}(q^n y)^k$$

5 Bijection entre polyominos et empilements

Soit P un polyomino parallèlogramme à n colonnes, notées $C_1, ..., C_n$. Pour $1 \leq i \leq n$, soit b_i la hauteur de la colonne C_i. Pour $1 \leq i \leq n$, soit a_i le nombre de cellules par lesquelles les colonnes C_i et C_{i-1} sont en contact, et posons $a_1 = 1$.

On a $a_1 \leq b_1$, et pour $2 \leq i, a_i \leq min(b_i, b_{i-1})$.

Définition

Soit f l'application qui, à un polyomino P, associe l'empilement $f(P) = E_n \sqcup ... \sqcup E_1$, où:

- E_i est l'empilement réduit à la pièce $[a_i, b_i] * \{0\}$,
- $(a_1, ..., a_n) et (b_1, ..., b_n)$ sont définis comme ci-dessus.

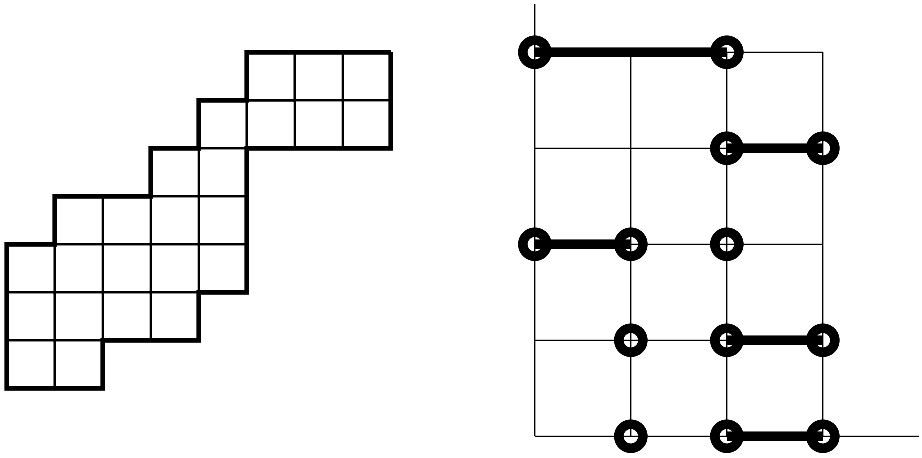

FIG. 5 - *Un polyomino parallèlogramme et son image par f*

Définition

Une *demi-pyramide de segments* est un empilement possédant une seule pièce maximale, le support de celle-ci s'écrivant de plus $[1, b]$, $1 \leq b$.

Lemme

Soit P un polyomino parallèlogramme à n colonnes.
1. La pièce $[a_n, b_n] * \{0\}$ est la plus à gauche des pièces minimales de $f(P)$.
2. L'empilement $f(P)$ est une demi-pyramide de segments.

Preuve

Par récurrence sur le nombre de colonnes de P.

Proposition

1. L'application f est une bijection entre les polyominos parallèlogrammes et les demi-pyramides de segments.
2. Soit P un polyomino parallèlogramme:

- la largeur de P est égale au nombre de pièces de $f(P)$;
- la hauteur de P est la somme des longueurs des pièces de $f(P)$ augmentée d'un;
- l'aire de P est la somme des extrémités droites des pièces de $f(P)$.

Preuve

2. se déduit aisément de la définition de f.

1. vient du fait que le lemme précédent nous permet de construire la réciproque de f. On montre l'existence et l'unicité d'un antécédent à toute demi-pyramide par récurrence sur le nombre de ses pièces. (cf exemple)

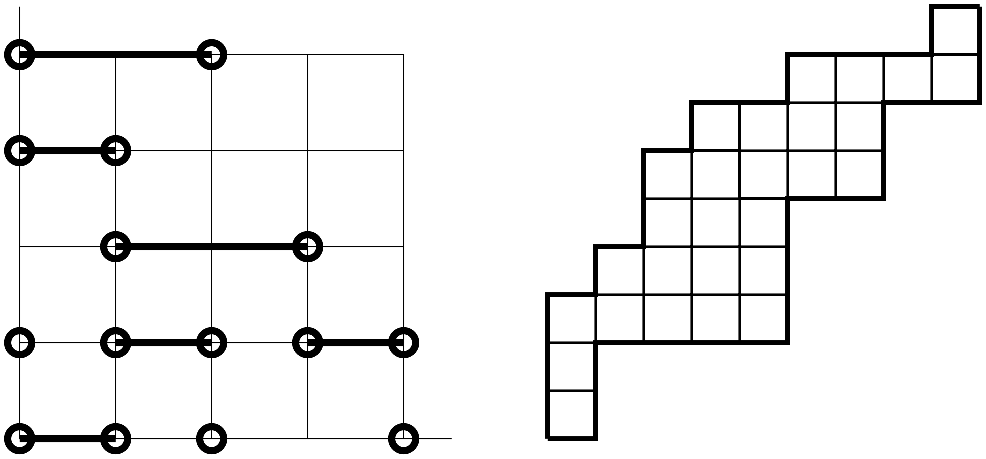

FIG. 6 - *Un empilement de segments et son antécédent par f*

Cette proposition ramène ainsi toute énumération de polyominos parallèlogrammes à une énumération de demi-pyramides de segments convenablement valués. Soit la valuation définie par $\nu([a,b]) = xy^{b-a}q^b$.

Corollaire

Soit $X(x,y,q)$ la série génératrice des polyominos parallèlogrammes comptés suivant la largeur (par x), la hauteur (par y), et l'aire (par q). Soit X' celle des demi-pyramides de segments valués par ν. Alors $X = yX'$.

6 Enumération

Proposition

La série génératrice X des polyominos parallèlogrammes est:

$$X = -y\frac{N'}{N}$$

avec

$$N' = \sum_{1 \leq n} \frac{(-1)^n x^n q^{C^2_{n+1}}}{(q)_{n-1}(yq)_n}, N = \sum_{0 \leq n} \frac{(-1)^n x^n q^{C^2_{n+1}}}{(q)_n(yq)_n}$$

Preuve

D'après le corollaire précédent, on est ramené à l'énumération des demi-pyramides de segments. Or, un empilement non vide est une demi-pyramide si et seulement si toutes ses pièces maximales sont à support dans $\Lambda = \{[1,b], 1 \leq b\}$. Le théorème d'inversion fournit alors la série génératrice X' sous la forme:

$$X' = \frac{\sum_{F\in\Theta(\Lambda^c)}(-1)^{|F|}\nu(F)}{\sum_{F\in\Theta}(-1)^{|F|}\nu(F)} - 1 = -\frac{N'}{N}$$

où N est la série génératrice alternée des empilements triviaux et N' celle des empilements triviaux ayant au moins une pièce dans Λ. Reste à montrer que N et N' ont bien les valeurs annoncées. Il existe une bijection g entre les empilements triviaux à n pièces et les couples (α, β) de partitions à parts inférieures ou égales à n telle que, si $F = \{[a_i, b_i] * \{0\}, 1 \leq i \leq n\}$ est un empilement trivial et $g(F) = (\alpha, \beta)$:

- le nombre de parts de β est $\sum_{1\leq i\leq n}(b_i - a_i)$,
- si $|\alpha|$ (resp. $|\beta|$) désigne le nombre que partitionne α (resp. β), alors:

$$\sum_{1\leq i\leq n} b_i = C^2_{n+1} + |\alpha| + |\beta|$$

.

En effet posons $b_0 = 0$, et pour $1 \leq i \leq n$, soient:

$$\alpha_i = a_i - b_{i-1} - 1, \beta_i = b_i - a_i$$

On associe alors à F le couple $g(F) = (\alpha, \beta)$ où α (resp. β) est la partition ayant α_{n-i+1} (resp. β_{n-i+1}) parts égales à i, $1 \leq i \leq n$. On vérifie aisément que g satisfait les propriétés annoncées.

De plus, F a une pièce à support dans $\{[1,b], 1 \leq b\}$ si et seulement si $\alpha_1 = 0$, ie si et seulement si α est à parts inférieures ou égales à $n-1$.

Les valeurs de N et N' découlent alors des résultats concernant l'énumération des partitions vus dans le paragraphe 4.

7 Applications à la Physique

La combinatoire énumérative a d'importantes applications en physique, notamment en mécanique statistique.

En particulier, l'étude des animaux dirigés présente de grandes similitudes avec celle de systèmes physiques: il est remarquable que si $f(t)$ est la série génératrice des polyominos dirigés alors $-f(-t)$ est exactement la densité d'un certain modèle de gaz, dû à Baxter.

L'intérêt des modèles est qu'ils présentent, comme les modèles réels, une transition de phase.

Un animal dirigé du plan (notion équivalente à celle de polyomino dirigé) est un ensemble de points de $Z * Z$ tel que l'on puisse passer d'un point fixe appelé point source à tout autre point de l'ensemble en ne faisant que des pas Nord et Est.

D'autres nombreuses applications de la combinatoire à la physique viennent de l'étude d'objets appelés percolations.

8 Références

Nous avons essentiellement travaillé sur les documents suivants:

- Mireille BOUSQUET-MELOU, q-Enumération des polyominos convexes, éditions du LACIM,
- Gérard VIENNOT, Problèmes combinatoires posés par la physique statistique, Séminaire BOURBAKI, 1983/84, 626.

On pourra aussi consulter les ouvrages de CARTIER et FOATA pour en savoir plus sur les empilements de pièces, plus généralement sur les "monoïdes semi-commutatifs" et de BAXTER, plus orientés vers la physique.