Théorème de Van Kampen

Denis AUROUX et Vincent BELROSE
Responsable: Lionel SCHWARTZ

31 mai 1994

1 Introduction

La détermination du groupe fondamental de divers espaces joue un rôle important en topologie algébrique. Le principal outil pour cette détermination est le théorème de Van Kampen, qui permet de calculer le groupe fondamental d'un espace connexe X réunion de deux sous-espaces ouverts U_1 et U_2 connexes d'intersection $U_0 = U_1 \cap U_2$ connexe en fonction des groupes fondamentaux de U_i, $0 \leq i \leq 2$. Nous allons énoncer ce théorème et en donner deux démonstrations différentes, puis exposer quelques-unes de ses applications.

2 Enoncé du théorème

Soit X un espace topologique connexe par arcs, U_1 et U_2 deux sous-espaces ouverts connexes par arcs de X tels que $X = U_1 \cup U_2$ et que $U_0 = U_1 \cap U_2$ soit non vide et connexe par arcs. Soit $x_0 \in U_0$ le point de base de tous les groupes fondamentaux considérés. Pour i=1 ou 2 on note ϕ_i l'homomorphisme induit par l'injection canonique de $\pi_1(U_0)$ dans $\pi_1(U_i)$, et ψ_i l'homomorphisme induit par l'injection canonique de $\pi_1(U_i)$ dans $\pi_1(X)$. Le diagramme suivant est alors commutatif:

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(U_1) \arrow[r, "\psi_1"] & \pi_1(X) \\
\pi_1(U_0) \arrow[u, "\phi_1"] \arrow[r, "\phi_2"] \arrow[ur] & \pi_1(U_2) \arrow[u, "\psi_2"']
\end{tikzcd}$$

Théorème 2.1 *(Seifert et Van-Kampen): Soit H un groupe quelconque, ρ_1 et ρ_2 deux homomorphismes tels que $\rho_1 \circ \phi_1 = \rho_2 \circ \phi_2$. Alors il existe un unique homomorphisme*

$\sigma : \pi_1(X) \to H$ *tel que le diagramme suivant soit commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
 & & H \\
\pi_1(U_1) \arrow[r, "\psi_1"] \arrow[urr, "\rho_1"] & \pi_1(X) \arrow[ur, "\sigma"] & \\
\pi_1(U_0) \arrow[u, "\phi_1"] \arrow[r, "\phi_2"] & \pi_1(U_2) \arrow[u, "\psi_2"] \arrow[uur, "\rho_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Il est aisé de vérifier que cette propriété universelle caractérise $\pi_1(X)$ à isomorphisme près. En fait, on va prouver le résultat plus général suivant :

Soit X un espace topologique connexe par arcs et $x_0 \in X$, $\{U_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ un recouvrement de X par des ouverts connexes par arcs contenant x_0, tel que pour tous λ_1, $\lambda_2 \in \Lambda$, il existe $\lambda \in \Lambda$ tel que $U_{\lambda_1} \cap U_{\lambda_2} = U_\lambda$.

Soit $\pi(U_\lambda)$ le groupe fondamental de U_λ au point x_0, et ψ_λ l'homomorphisme induit par l'injection canonique de $\pi(U_\lambda)$ dans $\pi(X)$. Lorsque $U_\lambda \subset U_\mu$, on note $\phi_{\lambda\mu}$ l'homomorphisme induit par l'injection canonique de $\pi(U_\lambda)$ dans $\pi(U_\mu)$, et le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\pi(U_\lambda) \arrow[d, "\phi_{\lambda\mu}"'] \arrow[dr, "\psi_\lambda"] & \\
\pi(U_\mu) \arrow[r, "\psi_\mu"] & \pi(X)
\end{tikzcd}$$

Théorème 2.2 *: Sous les hypothèses ci-dessus, le groupe $\pi(X)$ est solution du problème universel suivant : soit H un groupe quelconque, et $\rho_\lambda : \pi(U_\lambda) \to H$ une famille d'homomorphismes, tels que si $U_\lambda \subset U_\mu$ le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
\pi(U_\lambda) \arrow[d, "\phi_{\lambda\mu}"'] \arrow[dr, "\rho_\lambda"] & \\
\pi(U_\mu) \arrow[r, "\rho_\mu"] & H
\end{tikzcd}$$

Alors il existe un unique homomorphisme $\sigma : \pi(X) \to H$ tel que pour tout $\lambda \in \Lambda$, le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} \pi(U_\lambda) \arrow[d, "\psi_\lambda"'] \arrow[dr, "\rho_\lambda"] & \\ \pi(X) \arrow[r, "\sigma"] & H \end{tikzcd}$$

De plus, cette propriété universelle caractérise $\pi(X)$ à un unique isomorphisme près.

3 Lemmes préliminaires

Lemme 3.1 *(nombre de Lebesgue) : Soit X un espace métrique compact et $(U_j)_{j\in J}$ un recouvrement ouvert de X. Il existe un nombre $\epsilon > 0$ appelé nombre de Lebesgue du recouvrement tel que toute partie de X de diamètre inférieur à ϵ soit contenue dans un des ouverts U_j.*

DÉMONSTRATION: Supposons que pour tout n il existe une boule fermée B_n de centre x_n et de rayon $1/n$ dans X qui ne soit contenue dans aucun ouvert du recouvrement ; soit x un point d'accumulation de la suite (x_n). Si $x \in U_j$, il existe un entier M tel que la boule fermée B de centre x et de rayon $1/M$ soit contenue dans U_j, et on peut trouver $N \geq 2M$ tel que pour $n \geq N$ la distance de x_n à x soit inférieure à $1/2M$. Pour $n \geq N$ on a donc $B_n \subset B \subset U_j$ d'où contradiction.

Lemme 3.2 *: Le groupe $\pi(X)$ est engendré par les images $\psi_\lambda(\pi(U_\lambda))$ pour $\lambda \in \Lambda$.*

DÉMONSTRATION: Soit $\gamma : I \to X$ un lacet et soit $1/n$ plus petit que le nombre de Lebesgue du recouvrement de I par les $\{\gamma^{-1}(U_\lambda), \lambda \in \Lambda\}$. Pour tout $1 \leq i \leq n$, il existe λ_i tel que la restriction γ_i de γ à $[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$ soit à valeurs dans U_{λ_i}.

Soit pour $1 \leq i \leq n-1$, β_i un chemin dans $U_{\lambda_i} \cap U_{\lambda_{i+1}}$ joignant x_0 à $\gamma(\frac{i}{n})$, et $\beta_0 = \beta_n$ le lacet constant en x_0 : alors pour $1 \leq i \leq n-1$, $\alpha_i = \beta_{i-1}.\gamma_i.\beta_i^{-1}$ est un lacet en x_0 à valeurs dans U_{λ_i}, or $\alpha_1.\alpha_2.\ldots.\alpha_{n-1}$ est homotope à γ.

4 Première Démonstration

Pour des raisons de concision la preuve qui suit contient de nombreux abus de notation. Les puristes se référeront au livre de Massey [1].

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.2: Soit H un groupe, et $\rho_\lambda : \pi(U_\lambda) \to H$ une famille d'homomorphismes vérifiant les hypothèses du théorème. Il faut démontrer l'existence d'un unique homomorphisme $\sigma : \pi(X) \to H$ tel que pour tout $\lambda \in \Lambda$, le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} \pi(U_\lambda) \arrow[d, "\psi_\lambda"'] \arrow[dr, "\rho_\lambda"] & \\ \pi(X) \arrow[r, "\sigma"] & H \end{tikzcd}$$

Il est clair que σ s'il existe est unique : en effet soit $\alpha \in \pi(X)$. D'après le lemme 3.2, on a

$$\alpha = \psi_{\lambda_1}(\alpha_1).\psi_{\lambda_2}(\alpha_2).\ldots.\psi_{\lambda_n}(\alpha_n)$$

où $\alpha_i \in \pi(U_{\lambda_i})$ pour $1 \leq i \leq n$, et nécessairement

$$\sigma(\alpha) = \rho_{\lambda_1}(\alpha_1).\rho_{\lambda_2}(\alpha_2).\ldots.\rho_{\lambda_n}(\alpha_n)$$

Il suffit donc de prouver que σ est indépendant de la décomposition de α, c'est à dire que si $\beta_i \in \pi(U_{\lambda_i})$ pour $1 \leq i \leq q$ sont tels que

$$\psi_{\lambda_1}(\beta_1).\psi_{\lambda_2}(\beta_2).\ldots.\psi_{\lambda_q}(\beta_q) = 1$$

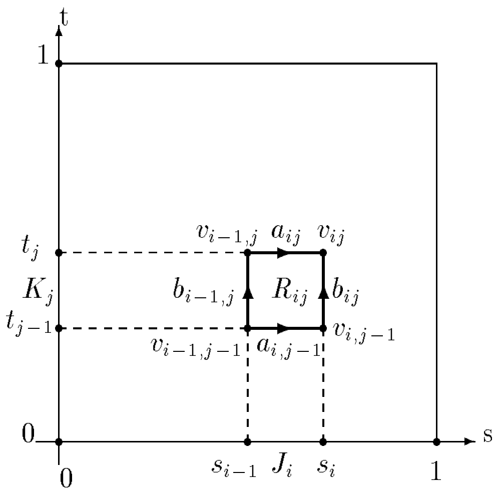
alors

$$\rho_{\lambda_1}(\beta_1).\rho_{\lambda_2}(\beta_2).\ldots.\rho_{\lambda_q}(\beta_q) = 1$$

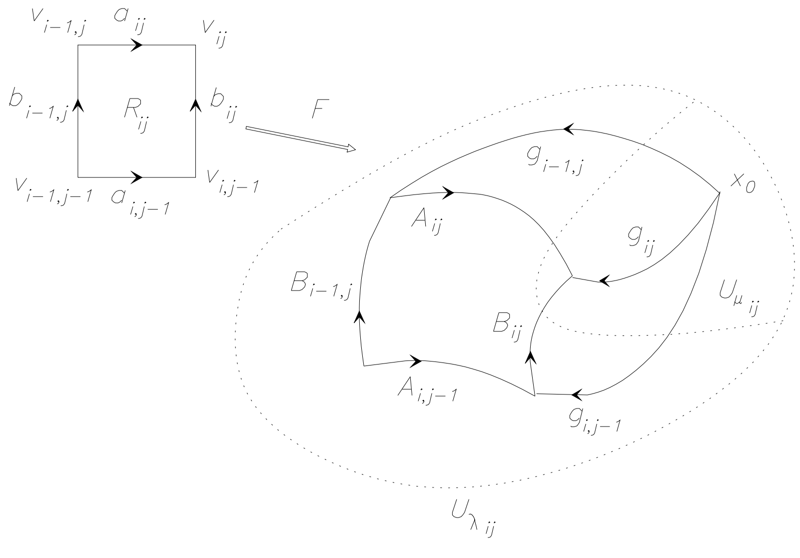
Soit pour $1 \leq i \leq q$, $f_i : [\frac{i-1}{q}, \frac{i}{q}] \to U_{\lambda_i}$ un chemin fermé représentant β_i, le produit $\prod_{i=1}^{q} \psi_{\lambda_i}(\beta_i)$ est représenté par $f : [0,1] \to X$ définie par $f|[\frac{i-1}{q}, \frac{i}{q}] = f_i$. Par hypothèse f est homotope au lacet constant, il existe donc $F : I \times I \to X$ telle que pour tous $s, t \in I$, $F(s,0) = f(s)$ et $F(s,1) = F(t,0) = F(1,t) = x_0$.

Soit ϵ le nombre de Lebesgue du recouvrement $\{F^{-1}(U_\lambda), \lambda \in \Lambda\}$ de $I \times I$. Subdivisons $I \times I$ en rectangles $[s_{i-1}, s_i] \times [t_{j-1}, t_j]$ de diamètre inférieur à ϵ, avec $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_m = 1$, $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$, de facon telle que $\{1/q, 2/q, \ldots, (q-1)/q\} \subset \{s_1, s_2, \ldots, s_{m-1}\}$.

On définit alors les sommets $v_{ij} = (s_i, t_j)$, les intervalles $J_i = [s_{i-1}, s_i]$ et $K_j = [t_{j-1}, t_j]$, les rectangles $R_{ij} = J_i \times K_j$, les arêtes horizontales $a_{ij} = J_i \times \{t_j\}$ et les arêtes verticales $b_{ij} = \{s_i\} \times K_j$. On dispose alors des chemins $A_{ij} = F_{|a_{ij}}$ et $B_{ij} = F_{|b_{ij}}$.



Pour chaque rectangle R_{ij} choisissons un ouvert $U_{\lambda(i,j)}$ contenant $F(R_{ij})$. Chaque sommet v_{ij} appartient à 1, 2 ou 4 rectangles R_{kl} ; si $U_{\mu(i,j)}$ est l'intersection des $U_{\lambda(k,l)}$ on a donc $F(v_{ij}) \in U_{\mu(i,j)}$. On choisit alors un chemin $g_{ij} : I \to U_{\mu(i,j)}$ joignant x_0 à $F(v_{ij})$ tel que si $F(v_{ij}) = x_0$, g_{ij} est le chemin constant.



Lemme 4.1 *: soient λ, $\mu \in \Lambda$, et $h : I \to U_\lambda \cap U_\mu$ tel que $h(0) = h(1) = x_0$ un lacet. Soient $\alpha \in \pi(U_\lambda)$ et $\beta \in \pi(U_\mu)$ les classes d'équivalence de h, alors $\rho_\lambda(\alpha) = \rho_\mu(\beta)$.*

Ce lemme est trivial en considérant la classe de h dans $\pi(U_\nu)$ où $U_\nu = U_\lambda \cap U_\mu$, étant donné que $\rho_\nu = \rho_\lambda \phi_{\nu\lambda} = \rho_\mu \phi_{\nu\mu}$. On peut alors poser sans ambiguité $\rho_\lambda(\alpha) = \rho_\mu(\beta) = \rho(h) \in H$.

Posons alors $\alpha_{ij} = \rho(g_{i-1,j} A_{ij} g_{ij}^{-1})$ et $\beta_{ij} = \rho(g_{i,j-1} B_{ij} g_{ij}^{-1})$. en considérant $F_{|R_{ij}}$ il vient $A_{i,j-1} B_{ij} \sim B_{i-1,j} A_{ij}$ et donc

$$(g_{i-1,j-1} A_{i,j-1} g_{i,j-1}^{-1})(g_{i,j-1} B_{ij} g_{ij}^{-1}) \sim (g_{i-1,j-1} B_{i-1,j} g_{i,j-1}^{-1})(g_{i,j-1} A_{ij} g_{ij}^{-1})$$

d'où $\alpha_{i,j-1}\beta_{ij} = \beta_{i-1,j}\alpha_{ij}$

Comme les k/q appartiennent à $\{s_i\}$, on a

$$\prod_{i=1}^{m} \alpha_{i0} = \prod_{k=1}^{q} \rho_{\lambda_k}(\beta_k)$$

De plus $F(s,1) = F(0,t) = F(1,t) = x_0$ donc $\alpha_{in} = 1$ pour $1 \leq i \leq m$ et $\beta_{0j} = \beta_{mj} = 1$ pour $1 \leq j \leq n$. Pour prouver le théorème on a vu qu'il faut prouver que $\prod_{k=1}^{q} \rho_{\lambda_k}(\beta_k) = 1$, il suffit donc de prouver que $\prod_{i=1}^{m} \alpha_{i,j-1} = \prod_{i=1}^{m} \alpha_{ij}$ pour $1 \leq j \leq n$ ce qui permettra d'obtenir $\prod_{i=1}^{m} \alpha_{i0} = \prod_{i=1}^{m} \alpha_{in}$ et de conclure.

Or cette relation est vérifiée car on a

$$\begin{aligned}
\alpha_{1,j-1}\alpha_{2,j-1}\ldots\alpha_{m,j-1} &= \alpha_{1,j-1}\alpha_{2,j-1}\ldots\alpha_{m,j-1}\beta_{mj} \\
&= \alpha_{1,j-1}\alpha_{2,j-1}\ldots\alpha_{m-1,j-1}\beta_{m-1,j}\alpha_{mj} \\
&= \alpha_{1,j-1}\alpha_{2,j-1}\ldots\beta_{m-2,j}\alpha_{m-1,j}\alpha_{mj} \\
&\vdots \\
&= \beta_{0j}\alpha_{1j}\alpha_{2j}\ldots\alpha_{m-1,j}\alpha_{mj}
\end{aligned}$$

Le théorème est donc démontré.

5 Seconde démonstration

Cette démonstration fait appel à la théorie des revêtements, et utilise des hypothèses supplémentaires. On supposera en effet que l'espace X est localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe, hypothèse qui sera toujours vérifiée dans la pratique.

On utilisera en outre deux lemmes de la classification des revêtements, sans toutefois en donner de démonstration, afin de ne pas alourdir cet exposé.

Soit (B,b) un espace connexe, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe.

Définition 5.1 *On appelle $\pi(B)$-ensemble tout ensemble S sur lequel on fait opérer le groupe $\pi(B)$.*

On dit que S et T sont isomorphes en tant que $\pi(B)$-ensembles s'il existe une bijection $\phi : S \to T$ compatible avec l'action de $\pi(B)$, c'est à dire telle que $\phi(\alpha.s) = \alpha.\phi(s), \forall s \in S, \forall \alpha \in \pi(B)$

Lemme 5.1 *Soit S un $\pi(B)$-ensemble. Alors il existe un revêtement*

$$p_S : E_S \to B$$

tel que $p_S^{-1}(b)$ et S soient isomorphes en tant que $\pi(B)$-ensembles.

Lemme 5.2 *Deux revêtements $p_1 : E_1 \to B$ et $p_2 : E_2 \to B$ sont isomorphes si et seulement si $p_1^{-1}(b)$ et $p_2^{-1}(b)$ sont isomorphes en tant que $\pi(B)$-ensembles.*

Remarquons que ces deux lemmes peuvent s'appliquer à X, U_1, U_2 et U_0. Nous sommes maintenant en mesure de donner une démonstration du théorème:

Preuve du Théorème 2.1: Soit x_0 un élément fixé de U_0. Le groupe $\pi(U_i)$ opère sur H par les translations à gauche, de la facon suivante: $g \to \rho_i(\alpha).g$, où $\alpha \in \pi(U_i)$. D'après le lemme 5.1, il existe donc un revêtement $p_i : E_i \to U_i$ pour i=1,2, et un isomorphisme r_i de $\pi(U_i)$-ensembles entre H et $p_i^{-1}(x_0)$.

On considere maintenant les revêtements q_i induits par les p_i, au dessus de U_0: $q_i : D_i = p_i^{-1}(U_0) \to U_0$. Comme $\rho_1 \circ \phi_1 = \rho_2 \circ \phi_2$, $q_1^{-1}(x_0)$ et $q_2^{-1}(x_0)$ sont isomorphes en tant que $\pi(U_0)$-ensembles. Donc d'après le lemme 5.2, les revêtements q_1 et q_2 sont isomorphes, et il existe un isomorphisme $t : D_2 \to D_1$ tel que $t_{|p_2^{-1}(x_0)} = r_1 \circ r_2^{-1}$

$$\begin{tikzcd}
D_2 = p_2^{-1}(U_0) \arrow[rr, "\cong t"] \arrow[dr, "q_2"] & & D_1 = p_1^{-1}(U_0) \arrow[dl, "q_1"'] \\
& U_0 &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
p_2^{-1}(x_0) \arrow[rr, "\cong t"] & & p_1^{-1}(x_0) \\
& H \arrow[ul, "r_2", "\cong"'] \arrow[ur, "\cong", "r_1"'] &
\end{tikzcd}$$

(les r_i sont des isomorphismes de $\pi(U_i)$-ensembles, mais aussi de $\pi(U_0)$-ensembles, de par la commutativité du diagramme de départ)

Soit $E_1 \cup_t E_2$ l'espace obtenu en recollant E_2 à E_1 au moyen de l'homéomorphisme $t : D_2 \to D_1$. Les projections p_1 et p_2 déterminent une application continue p de $E_1 \cup_t E_2$ sur X, et $p : E_1 \cup_t E_2 \to X$ est un revêtement. De plus si q désigne la projection de l'espace somme $E_1 \cup E_2$ sur $E_1 \cup_t E_2$, $q_{|E_1}$ (resp $q_{|E_2}$) est un isomorphisme de E_1 (resp E_2) sur le revêtement induit p: $p^{-1}(U_1) \to U_1$ (resp. $p : p^{-1}(U_2) \to U_2$).

$$\begin{tikzcd}
E_1 \arrow[r, "\cong"] \arrow[dr, "p_1"'] & p^{-1}(U_1) \arrow[r] \arrow[d, "p"] & E_1 \cup_t E_2 \arrow[d, "p"] & p^{-1}(U_2) \arrow[l] \arrow[d, "p"] & E_2 \arrow[l, "\cong"'] \arrow[dl, "p_2"] \\
& U_1 \arrow[r] & X & U_2 \arrow[l] &
\end{tikzcd}$$

En considérant le revêtement $p : E_1 \cup_t E_2 \to X$ on obtient un homomorphisme $\tilde{\sigma}$ de $\pi(X)$ dans le groupe des permutations de $p^{-1}(x_0)$ (action du groupe fondamental sur la fibre), et, compte tenu des isomorphismes précédents, on a

$$\tilde{\sigma}(\psi_i(\alpha)) \circ (q \circ r_i) = (q \circ r_i) \circ \rho_i(\alpha), \alpha \in \pi(U_i)$$

Par conséquent, si on pose $\chi = q \circ r_1 = q \circ t \circ r_2 = q \circ r_2$, l'application $\gamma \to \chi^{-1} \circ \tilde{\sigma}(\gamma) \circ \chi$ determine un homomorphisme $\hat{\sigma}$ de $\pi(X)$ dans le groupe des permutations de H, tel que:

$\hat{\sigma}(\psi_i(\alpha))g = \rho_i(\alpha)g$ où $\alpha \in \pi(U_i), g \in H$, pour i=1,2

Puisque $\pi(X)$ est engendré par les images de ρ_1 et ρ_2, pour $\gamma \in \pi(X)$, la permutation $\hat{\sigma}(\gamma)$ de H est la translation à gauche par un element $\sigma(\gamma)$ de H. De plus l'application $\gamma \to \sigma(\gamma)$ est un homomorphisme de $\pi(X)$ dans H tel que $\rho_1 = \sigma \circ \psi_1 = \sigma \circ \psi_2$.

C'était le résultat cherché.

6 Application à la théorie des nœuds

Définition 6.1 *: Un nœud dans $\mathbb{R}^3$ est une courbe fermée simple de $\mathbb{R}^3$, c'est à dire une application injective de S^1 dans $\mathbb{R}^3$, ou encore un lacet de $\mathbb{R}^3$.*

Définition 6.2 *: Deux nœuds K_1 et K_2 dans $\mathbb{R}^3$ sont dits équivalents s'il existe un homéomorphisme $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ préservant l'orientation tel que $h(K_1) = K_2$.*

Il est clair que si K_1 et K_2 sont équivalents, h constitue un homéomorphisme de $\mathbb{R}^3 - K_1$ sur $\mathbb{R}^3 - K_2$, ces deux espaces ont donc des groupes fondamentaux isomorphes. Le groupe $\pi_1(\mathbb{R}^3 - K)$ est appelé *groupe* du nœud K.

Nous allons étudier une classe de nœuds qui sont contenus dans un tore plongé dans $\mathbb{R}^3$ de fa con canonique (c'est à dire par révolution d'un cercle autour d'une droite dans le plan du cercle ; on définira de même le tore plein obtenu par révolution d'un disque fermé). Rappelons qu'un tore peut être vu comme le quotient $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.

Définition 6.3 *: On appelle nœud du tore de type (m, n), pour $1 < m < n$ entiers premiers entre eux, l'image par le plongement du tore dans $\mathbb{R}^3$ de la projection canonique sur le tore de la droite de $\mathbb{R}^2$ d'équation $mx = ny$.*

C'est une courbe fermée simple tracée sur le tore, qui parcourt m tours dans une direction de n dans l'autre. Nous allons calculer le groupe de ces nœuds.

Lemme 6.1 *: Le groupe fondamental du complémentaire d'un cercle dans $\mathbb{R}^3$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$.*

DÉMONSTRATION : par projection stéréographique, $\mathbb{R}^3$ est homéomorphe à S^3 privé d'un point a qu'on appelle souvent l'infini. On a donc

$$\mathbb{R}^3 - S^1 \cong S^3 - (S^1 \cup \{a\})$$

or si le cercle qu'on ôte à S^3 passe par deux points diamétralement opposés de S^3 et qu'on choisit l'un de ces deux points, b, comme point à l'infini d'une projection stéréographique, le cercle s'envoie par la projection stéréographique sur une droite d de $\mathbb{R}^3$, on a donc

$$S^3 - (S^1 \cup \{a\}) \cong \mathbb{R}^3 - (d \cup \{a\}) = X$$

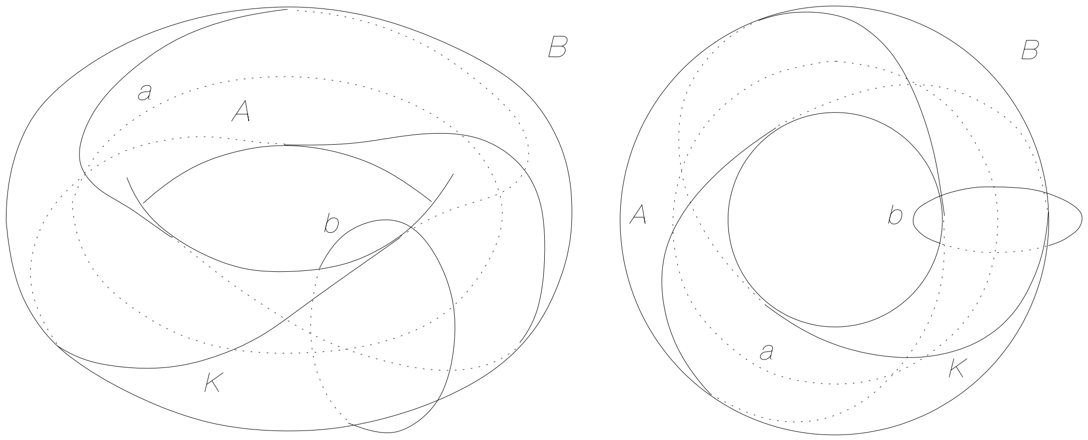
On est donc ramené au calcul du groupe fondamental de $\mathbb{R}^3$ privé d'une droite et d'un point. Or considérons un plan contenant la droite d mais pas le point a comme le noyau d'une forme linéaire ϕ qui s'annule sur d et prend une valeur $\alpha > 0$ en a, et posons $U = \{x \in X : \phi(x) < 2\alpha/3\}$ et $V = \{x \in X : \phi(x) > \alpha/3\}$ ce qui constitue un recouvrement ouvert de X. $U \cup V$ qui se rétracte par déformation sur un point est simplement connexe. V est un demi-espace privé d'un point, se rétracte par déformation sur S^2, et est donc simplement connexe. Par ailleurs U se rétracte par déformation sur un cercle, son groupe fondamental est donc $\mathbb{Z}$. Appliquons le théorème de Van Kampen pour $H = \mathbb{Z}$ et $\rho_1 = Id_{\mathbb{Z}}$: on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathbb{Z} \\
\mathbb{Z} \arrow[urr, "Id"] \arrow[r, "\psi_1"] & \pi_1(X) \arrow[ur, "\sigma"] & \\
0 \arrow[u] \arrow[r] & 0 \arrow[u, "\psi_2"] \arrow[uur] &
\end{tikzcd}$$

Ceci implique que ψ_1 est injectif ; comme de plus $\pi_1(X)$ est engendré par les images de ψ_1 et ψ_2 d'après le lemme 3.2, ψ_1 est surjectif, on a donc $\pi_1(X) = \mathbb{Z}$.

Notation : on notera $< \alpha_1, \ldots, \alpha_n >$ le groupe libre engendré par α_i, $1 \leq i \leq n$.

Proposition 6.1 *: Le groupe d'un nœud du tore de type (m, n) est le quotient du groupe libre à deux générateurs α et β par le sous-groupe engendré par $\alpha^m \beta^n$, c'est à dire $< \alpha, \beta > / < \alpha^m \beta^n >$.*



DÉMONSTRATION : soit K un nœud du tore de type (m, n), où $1 < m < n$, et m et n sont premiers entre eux. Notons A le tore plein obtenu en prenant l'adhérence de la composante connexe bornée du complémentaire du tore sur lequel est tracé K, et B l'adhérence de l'autre composante connexe. $A \cap B$ est donc le tore sur lequel est tracé K, et $A \cup B = \mathbb{R}^3$. Pour appliquer le théorème de Van Kampen il faut des ouverts : soit donc $\tilde{K}$ un voisinage tubulaire fermé dans $\mathbb{R}^3$ de K d'épaisseur ϵ suffisamment petite pour que $\mathbb{R}^3 - K$ se rétracte par déformation sur $\mathbb{R}^3 - \tilde{K}$ (le groupe de K et celui de $\tilde{K}$ sont égaux), et soient $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ des voisinages ouverts d'épaisseur $\epsilon/2$ de A et B ($\tilde{A} \cap \tilde{B}$ est alors un tore "épaissi").

On pose $U_1 = \tilde{A} - \tilde{K}$ et $U_2 = \tilde{B} - \tilde{K}$. On a $\mathbb{R}^3 - \tilde{K} = U_1 \cup U_2$, et les hypothèses du théorème de Van Kampen sont vérifiées. U_1 se rétracte par déformation sur son cercle central, son groupe fondamental est donc cyclique infini, $\pi_1(U_1) =< a >$. U_2 se rétracte par déformation sur le complémentaire d'un tore plein, qui est rétracte par déformation du complémentaire d'un cercle, son groupe fondamental est donc cyclique infini $\pi_1(U_2) =< b >$. De plus, $U_0 = U_1 \cap U_2 = (\tilde{A} \cap \tilde{B}) - \tilde{K}$ se rétracte par déformation sur $(A \cap B) - \tilde{K}$, qui est rétracte par déformation de $(A \cap B) - K$.

Or $(A \cap B) - K$ est une bande qui s'enroule sur le tore, homéomorphe à $S^1 \times]0, 1[$, son groupe fondamental est cyclique infini, $\pi_1(U_0) =< c >$. Par application du théorème de Van Kampen le diagramme suivant est commutatif pour tout groupe H et tous homomorphismes ρ_1 et ρ_2 vérifiant les hypothèses du théorème:

$$\begin{tikzcd}
 & & H \\
< a > \arrow[r, "\psi_1"] \arrow[urr, "\rho_1"] & \pi_1(X) \arrow[ur, "\sigma"] & \\
< c > \arrow[u, "\phi_1"] \arrow[r, "\phi_2"] & < b > \arrow[u, "\psi_2"'] \arrow[uur, "\rho_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Or $(A \cap B) - K$ est une bande qui s'enroule sur le tore en parcourant m tours dans un sens et n dans l'autre, on prouve aisément que $\phi_1(c) = a^m$ et $\phi_2(c) = b^{-n}$ (quitte à remplacer a et b par leurs inverses). De plus si on note $\alpha = \psi_1(a)$ et $\beta = \psi_2(b)$ le lemme 3.2 entraîne que α et β engendrent $\pi_1(X)$. L'égalité $\psi_1\phi_1 = \psi_2\phi_2$ implique que

$$\alpha^m = \psi_1(\phi_1(c)) = \psi_2(\phi_2(c)) = \beta^{-n}$$

c'est à dire que $\alpha^m\beta^n = 1$.

On pose $H =< \tilde{\alpha}, \tilde{\beta} > / < \tilde{\alpha}^n\tilde{\beta}^m >$, et $\rho_1(a) = \tilde{\alpha}$ et $\rho_2(b) = \tilde{\beta}$. On a clairement $Im(\sigma) \supset Im(\rho_i)$, donc $\{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}\} \subset Im(\sigma)$ donc σ est surjectif. On vérifie aisément que σ est injectif, la proposition est donc démontrée.

Proposition 6.2 *: Les nœuds du tore de type (m, n) pour $1 < m < n$ et m premier avec n sont deux à deux non équivalents.*

DÉMONSTRATION : Nous allons montrer que leurs groupes sont non isomorphes. Soit $G_{mn} =< \alpha, \beta > / < \alpha^m\beta^n >$. L'élément $\alpha^m = \beta^{-n}$ commute avec α et β, il appartient donc au centre $Z(G_{mn})$ de G_{mn}. Soit N le sous-groupe engendré par cet élément, on a $N \subset Z(G_{mn})$ donc N est normal. Soient $\bar{\alpha}$ et $\bar{\beta}$ les classes de α et β dans G_{mn}/N,

$$G_{mn}/N =< \bar{\alpha}, \bar{\beta} > / < \bar{\alpha}^m, \bar{\beta}^n >$$

est le produit libre d'un groupe cyclique à m éléments par un groupe cyclique à n éléments. Son centre est donc réduit à un élément, or l'image de $Z(G_{mn})$ est contenue dans $Z(G_{mn}/N) = \{1\}$ donc $Z(G_{mn}) \subset N$, on a donc $N = Z(G_{mn})$.

On a vu que $G_{mn}/Z(G_{mn})$ est isomorphe au produit libre de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ par $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, donc si $(m, n) \neq (m', n')$, $G_{mn}/Z(G_{mn}) \not\simeq G_{m'n'}/Z(G_{m'n'})$. Or, si $G \simeq G'$, alors $G/Z(G) \simeq G'/Z(G')$, d'où on déduit que $G_{mn} \not\simeq G_{m'n'}$ et le résultat.

7 Application: théorème de Nielsen-Schreier

Le théorème de Van-Kampen, appliqué dans le cadre de la théorie des graphes, permet de montrer de façon topologique et naturelle l'ennoncé suivant, de nature algébrique:

Théorème 7.1 *(Nielsen-Schreier) Tout sous-groupe d'un groupe libre est libre.*

Définition 7.1 *On appelle graphe tout complexe cellulaire localement fini de dimension au plus 1.*

Définition 7.2 *Soit K un graphe connexe. On appelle connectivité de K et on note $c(K)$ le plus grand entier n tel qu'il existe n arêtes distinctes $e_1, ..., e_n$ telles que $K - (e_1 \cup .... \cup e_n)$ soit connexe.*

Lemme 7.1 *Tout revêtement d'un graphe est un graphe.*

Preuvre: Tout revêtement connexe d'un segment est un segment. Comme un graphe est un complexe cellulaire de dimension au plus 1, et en considérant de plus les voisinages distingués, on obtient aisemment le résultat.

Lemme 7.2 *Le groupe fondamental d'un graphe K connexe fini de connectivité $c(K)$ est un groupe libre à $c(K)$ générateurs.*

Preuve: Récurrence sur $c(K)$. On suppose que chaque arête de K a ses deux extremités distinctes. Si $c(K) = 0$, alors K est simplement connexe (se démontre par recurrence sur le nombre d'arêtes de K). Supposons $c(K) \geq 1$. Soit e une arête telle que $K - e$ soit connexe, de connectivité $c(K) - 1$. Soit x et y les extrémités de e. Il existe alors une chaîne C dans $K - e$ qui relie x à y, et on peut supposer que cette chaîne est sans cycle. C est donc homéomorphe à un segment, et $C \cup e$ à un cercle. Soit maintenant z un point de e. Il est clair que $U = K - \{z\}$ se rectracte par déformation sur $K - e$, et donc ces deux ensembles ont même groupe fondamental. Soit W la réunion des arêtes de K ayant une extrémité dans C. On peut trouver un voisinage V de C dans l'adhérence de W tel que pour toute arête a de W on ait:

$\bar{a} \subset V$ si a est contenue dans $C \cup e$

$a \subset V$ si a a une seule extremité dans C

$a - a \cap V$ est réduit à un point si les deux extrémités de a sont C mais a n'est pas contenue dans $C \cup e$.

Le graphe $C \cup e$ est alors rétracte par déformation de V. De même le graphe C est un rétracte par déformation de $V - \{z\} = U \cap V$. Donc $\pi(U \cap V)$ est le groupe trivial. Si on applique le théorème de Van-Kampen à U et V qui sont deux ouverts de K, on voit alors que $\pi(K)$ est le groupe libre engendré par $\pi(U)$ et $\pi(V)$. Or $\pi(V)$ est le groupe libre à 1 générateur et par hypothèse de récurrence $\pi(U)$ est le groupe libre à $c(K) - 1$ générateurs. Donc $\pi(K)$ est le groupe libre à $c(K)$ générateurs.

Lemme 7.3 *Le groupe fondamental d'un graphe connexe K est un groupe libre.*

PREUVE: Schéma de démonstration: soit L un sous-graphe connexe fini de K, alors l'injection canonique de L dans K induit un morphisme injectif de $\pi(L)$ dans $\pi(K)$. De plus $\pi(K)$ est la réunion des $\pi(L)$. Donc le groupe fondamental de K est réunion de sous-groupes qui sont libres. Donc c'est un groupe libre.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME:

On traite le cas des groupes qui ont un nombre fini de générateurs; dans le cas général, la meme idée s'applique, mais plus difficilement. Soit donc G un groupe libre à m générateurs, alors G est clairement isomorphe au groupe fondamental du bouquet K de m cercles (dans le cas où G a un nombre infini de générateurs, toute la difficulté est de construire un graphe comme K). Soit H un sous-groupe de G. Il existe un revêtement connexe $p : L \to K$ tel que le groupe fondamental de L soit isomorphe à H (Un tel revêtement s'obtient en quotientant le revêtement simplement connexe de K par H). L est un graphe, par conséquent, H est un groupe libre.

8 Bibliographie

[1] Massey : A basic course in algebraic topology, Springer GTM 127

[2] Godbillon : Eléments de topologie algébrique, Hermann

[3] Gramain : Topologie des surfaces, PUF

[4] Zisman : Eléments de topologie algébrique

9 Remerciements

Les auteurs tiennent à remercier :

- leurs parents, sans qui ils n'auraient jamais vu le jour
- Josianne dont la bonne volonté leur a fait gagner un temps précieux
- Clipper pour son soutien dans l'adversité
- Jml pour la sono en salle S
- Jbellek qui a voulu qu'on le remercie (pourquoi ?)
- D. Knuth pour avoir inventé TEX
- Stéphane Aucante pour le rétroprojecteur
- Lionel Schwartz qui, lui, a compris le théorème de Van Kampen
- tous ceux qui ont accepté de se déranger pour écouter cet exposé